Història de la matemàtica: Grècia IIa

(els *Elements* d'Euclides: llibres I, II, III, IV, V i VI)

Resultats, textos i contextos

Josep Pla i Carrera

Institut d'Estudis Catalans

Secció de Ciències i Tecnologia

Història de la matemàtica: Grècia IIa (els *Elements* d'Euclides: llibres I, II, III, IV, V i VI)

Resultats, textos i contextos

Josep Pla i Carrera

Institut d'Estudis Catalans
Secció de Ciències i Tecnologia

Biblioteca de Catalunya. Dades CIP

Pla i Carrera, Josep, autor
Història de la matemàtica. Grècia IIa (els Elements d'Euclides, llibres I, II, III, IV, V i VI) : resultats, textos i contextos. – Primera edició
Bibliografia. Índexs
ISBN 9788499654140
I. Institut d'Estudis Catalans. Secció de Ciències i Tecnologia II. Títol
1. Euclides, Elements d' 2. Matemàtica grega — Història
514.112
51(38)(091)

Classificació AMS: Primària: 01xx, 01 - 01, 01A75, 00B50, 51-03. Secundària: 01Axx, 01A20, 01A05, 51M04, 51M05, 97G40.

Projecte «*Història de la Matemàtica grega*», dut a terme sota la direcció de Pilar Bayer, membre de la Secció de Ciències i Tecnologia de l'Institut d'Estudis Catalans.

Carrer del Carme, 47. 08001 Barcelona

Primera edició: juny del 2018

Assessoria lingüística: Margarida Bassols
Text revisat lingüísticament per la Unitat de Correcció del Servei Editorial de l'IEC

Disseny de la coberta: Azcunce | Ventura

Imprès a Open Print, SL

ISBN: 978-84-9965-414-0
Dipòsit Legal: B 16116-2018

A Pilar Bayer,
amb qui he compartit
moltíssimes experiències
des que, de joves,
estudiàvem matemàtiques.
És companya, col·lega i amiga.
I un model de curiositat,
rigor i passió intel·lectuals
digne d'imitació.
Compartim l'amor per la matemàtica
i la seva història.
Per la confiança i amistat
de tants anys,
vull deixar-li constància de la meva
estimació més sincera
en aquest volum on s'analitza
una de les obres «gegants»
de la matemàtica grega
i de tots els temps.
És una estimació
que emana directament
de la pensa i del sentiment.

Josep

There is no scorn more profound,
or on the whole more justifiable,
than that of the men who make
for the men who explain.*

Godfrey Harold Hardy

*Hardy (1940), traducció catalana, p. 77: «No hi ha desdeny més profund o, en darrer terme, més justificat que el que senten els creadors pels qui comenten el que ells fan.»

Sumari

Introducció xi

Capítol 1. Presentació dels *Elements* (Στοιχεῖα) d'Euclides. Llibres i, ii, iii, iv, v i vi 1
1.1. Breu descripció de la transmissió de l'obra 2
1.2. Algunes consideracions sobre els *Elements* 7
1.3. Ressenya del contingut dels sis primers llibres dels *Elements* 11
1.4. Problemes 60
1.5. Algorismes 68

Apèndix A. Text dels *Elements* (Στοιχεῖα) d'Euclides. Llibres i, ii, iii, iv, v i vi 71
A.1. La geometria plana elemental: llibres i, ii, iii i iv 74
A.2. La teoria general de la proporció i les aplicacions a la geometria: llibres v i vi 264

Les figures del text 353
Matemàtics i personatges citats 355

Bibliografia 367

Índex d'antropònims 375
Índex de citacions 381
Índex d'indrets 389
Índex de mots i formes grecs i llatins 393
Índex d'obres 399
Índex de termes 403

Índex general 417

Ἀλλ᾽ ὅμως τό γε εἰδέναι καὶ τὸ ἐπαΐειν τῇ τέχνῃ τῆς ἐμπειρίας ὑπάρχειν οἰόμεθα μᾶλλον, καὶ σοφωτέρους τοὺς τεχνίτας τῶν ἐμπείρων ὑπολαμβάνομεν, ὡς κατὰ τὸ εἰδέναι μᾶλλον ἀκολουθοῦσαν τὴν σοφίαν πᾶσι. Τοῦτο δ᾽ ὅτι οἱ μὲν τὴν αἰτίαν ἴσασιν οἱ δ᾽ οὔ. Οἱ μὲν γὰρ ἔμπειροι τὸ ὅτι μὲν ἴσασι, διότι δ᾽ οὐκ ἴσασιν. Οἱ δὲ τὸ διότι καὶ τὴν αἰτίαν γνωρίζουσιν. [...]

Ὅλως τε σημεῖον τοῦ εἰδότος καὶ μὴ εἰδότος τὸ δύνασθαι διδάσκειν ἐστίν, καὶ διὰ τοῦ το τὴν τέχνην τῆς ἐμπειρίας ἡγούμεθα μᾶλλον ἐπιστήμην ἶναι. δύνανται γάρ, οἱ δὲ οὐ δύνανται διδάσκειν.†

Aristòtil

† Aristòtil (2000), llibre i, 981a 23-31, i 981b 7-10, edició castellana, p. 72 i 73: «Perquè, al nostre entendre, saber i comprendre són privilegis de l'art i no de l'experiència. Considerem més savis els qui es regeixen per les lleis de l'art que no pas els qui ho fan només per l'experiència, perquè la saviesa és la conseqüència natural del saber. La raó d'això és que aquells que es guien per la llum de l'art coneixen la causa, el perquè de les coses, mentre que els altres no se n'adonen. L'experiència ens mostra simplement el que la cosa és però no el perquè. L'art, en canvi, ens en revela el perquè i la causa. [...]

»En general, el que palesa que es té coneixement d'una cosa és la capacitat de poder-la ensenyar a qui la desconeix. Heus ací, doncs, per què creiem que l'art és més ciència que no l'experiència: els qui posseeixen l'art estan capacitats per a ensenyar però els qui només tenen coneixements a partir de l'experiència adquirida no en són capaços.»

Introducció

> Wir verehren in dem alten Griechenland die Wiege der abendländischen Wissenschaft. Hier wurde zum ersten Mal das Gedankenwunder eines logischen Systems geschaffen, dessen Aussagen mit solcher Schärfe auseinander hervorgingen, daß jeder der bewiesenen Sätze jeglichem Zweifel entrückt war —Euklids Geometrie. Dies bewunderungswürdige Werk der Ratio hat dem Menschengeist das Selbstvertrauen für seine späteren Taten gegeben. Wen dies Werk in seiner Jugend nicht zu begeistern vermag, der ist nicht zum theoretischen Forscher geboren.‡
>
> Albert Einstein

La història de la matemàtica grega assoleix el cim al segle III aC, conegut com el *Segle d'Or de la Matemàtica Grega*. En aquest segon volum d'història de la matemàtica a Grècia correspondria, doncs, descriure els problemes, textos i contextos d'aquest període per a després, en un tercer volum, exposar-ne els epígons, molt importants, que s'estengueren durant nou se-

‡ «Reverenciem l'antiga Grècia com a bressol de la ciència occidental. Allà, per primera vegada, el món va ser testimoni del miracle d'un sistema lògic que procedia pas a pas amb tal precisió que totes i cadascuna de les seves proposicions eren absolutament indubtables. Em refereixo a la geometria d'Euclides. Aquest admirable triomf del raonament va proporcionar, a l'intel·lecte humà, la confiança necessària per a plantejar-se i assolir els èxits posteriors. Si aquesta obra no aconsegueix encendre el teu entusiasme juvenil, no has nascut per a ser investigador científic.» Einstein (1953), edició anglesa, p. 270.

gles. Però no ho farem. Interromprem el que seria el desenvolupament normal d'una història de la matemàtica grega per a dedicar dos volums (*Grècia IIa* i *Grècia IIb*) als *Elements* d'Euclides. Les raons d'aquesta decisió són múltiples. Una és de tipus metodològic. Ens ha semblat que aquesta història quedaria coixa si no contenia la totalitat dels *Elements* d'Euclides.[§]

A Pla (2016*c*) s'ha fet un ús anacrònic d'aquesta obra i s'ha indicat, sempre que ha estat possible, on es poden trobar els resultats establerts pels matemàtics anteriors a Euclides, que, en el millor dels casos, tenien accés a algun altre compendi d'*Elements* però no als euclidians.

Fer una presentació completa dels *Elements* d'Euclides permet constatar el progrés històric de l'organització i presentació del text. En aquest aspecte, Euclides és força acurat.

Tanmateix, per a una comprensió cabal del seu pensament, tant l'heretat dels matemàtics i filòsofs que el van precedir com el propi, el lector haurà de llegir «Les aportacions conceptuals de l'obra d'Euclides», d'aquesta *Història de la matemàtica* (*Grècia III*, § 2.2).

Els *Elements* d'Euclides constitueixen, doncs, un pont entre la matemàtica anterior al segle III aC i la d'aquest segle, i també entre aquesta i la dels segles ulteriors. És impossible explicar i entendre la matemàtica grega de després d'ell —i la del mateix Euclides que no sigui la dels *Elements*, com veurem a *Grècia III*— sense tenir-los presents i conèixer-ne el contingut específic, la metodologia, el que s'hi aconsegueix i el que fan possible. Conèixer-los fa entendre millor tots els resultats que obtingueren els matemàtics després d'ell i la seva obra.

[§] Sortosament, en català disposem d'una traducció molt acurada de l'obra d'Arquimedes gràcies als nostres amics i col·legues Pedro Miguel González Urbaneja i Josep Vaqué, i Ramon Masià. Ha estat editada, amb la cura que la caracteritza, per l'Editorial Alpha, dins la col·lecció de clàssics «Bernat Metge». Arquimedes (1997), Arquimedes (2010) i Arquimedes (2016).

És per tot això, doncs, que dediquem dos volums als *Elements* d'Euclides. El primer, *Grècia IIa*, conté la geometria plana euclidiana —llibres I, II, III i IV—[¶] i la teoria de la proporció d'Èudox —llibres V i VI. En definitiva, el que podríem anomenar «la geometria plana escolar».

En canvi, el segon volum, *Grècia IIb*, conté l'aritmètica pitagòrica —els llibres VII, VIII i IX—; el llibre X, dedicat a les magnituds incommensurables, molt particular; i els llibres XI, dedicat a l'estereometria, XII, a l'exhaustió eudoxiana i, finalment, XIII, a la construcció dels sòlids platònics. Cada volum inclou la bibliografia i els apèndixs adients. I tots dos volums són el resultat de la voluntat de fer una adaptació comentada dels *Elements* d'Euclides, en català.

Tanmateix, la figura del matemàtic grec i la seva altra obra formaran part del volum *Grècia III*, que contindrà la matemàtica i els matemàtics del segle III aC: Euclides, Arquimedes, Apol·loni, Aristarc, Eratòstenes, Nicomedes, Conó i Dositeu.

El quart i darrer volum, *Grècia IV*, analitzarà la resta de matemàtics grecs rellevants, entre els quals hi ha Dionísodor, Diocles, Zenòdor, Hiparc, Heró, Nicòmac, Menelau, Teó d'Esmirna, Ptolemeu, Diofant, Pappos, Teó d'Alexandria i Hipàtia.

No voldríem acabar aquesta breu introducció sense esmentar la complexitat dels *Elements* pel fet que són un text de maduresa. Això vol dir que hi entren en joc moltes idees intuïtives i moltes elaboracions formals.

Per a acabar, permeteu-me un record personal. En acabar la llicenciatura de matemàtiques a la Universitat de Barcelona, amb d'altres companys —recordo en Santi Forcada i la Vera Sacristán— vàrem voler fer una lectura exhaustiva de l'obra clau d'Euclides. Aviat ens vam desanimar. No vàrem saber copsar-ne la profunditat geomètrica i deductiva, ni l'entramat dels «ele-

[¶] Als llibres dels *Elements* ens hi referirem de tres maneres diferents: llibre I, EI o llibre primer.

ments», ni la fecunditat del que Euclides hi proposava i resolia, ni tampoc el que deixava per als matemàtics que, formats en la seva obra, el succeirien. Després, amb el pas dels anys i la maduresa que comporta, els *Elements* se m'han fet més familiars —sense pretendre haver-ne atrapat tota la profunditat— i m'he sentit embadalit pel seu contingut i entramat. Ras i curt, m'han entusiasmat.

És, precisament, aquest entusiasme el que voldríem transmetre en aquests dos volums. I, per això, no n'hem fet una traducció filològicament correcta i estricta, sinó una adaptació, tan acurada com ha estat possible però sobretot entenedora, planera dins la complexitat, clara en les zones més obscures, que pugui ser llegida per matemàtics de professió però també per estudiosos de la filosofia de la ciència i per professors de matemàtiques de tots els nivells. Esperem que tots en puguin treure «experiències docents» riques, en consonància amb la matemàtica de la qual som hereus des de l'època del desensonyament clàssic grec. S'ha de dir que aquesta obra inclou alguns fragments d'una gran riquesa si es volen estudiar com a textos clàssics de matemàtiques, clars, entenedors i rics, tant en el contingut com en la tècnica deductiva, que és, en definitiva, la manera de fer de la matemàtica.

Assolir aquest objectiu donaria a aquesta història de la matemàtica grega un valor afegit enorme i, amb aquesta publicació, l'Institut d'Estudis Catalans hauria ofert, a la llengua catalana, una obra cabdal del pensament humà. Vull agrair molt sincerament a aquesta institució que hagi posat la confiança en mi. En particular, al doctor David Serrat i a la doctora Pilar Bayer.

Per a acabar, voldria fer palesa la meva gratitud a l'assessora lingüística, doctora Margarida Bassols, per l'esforç afegit que li ha suposat començar a incorporar algunes de les directrius de la recent gramàtica publicada per l'IEC.

Capítol 1

Presentació dels *Elements* (Στοιχεῖα) d'Euclides. Llibres I, II, III, IV, V i VI

> Aber jenes große Ansehen der Mathematik ruht andererseits darauf, daß die Mathematik es auch ist, die den exakten Naturwissenschaften ein gewisses Maß von Sicherheit gibt, das sie ohne Mathematik nicht erreichen könnten.[1]
>
> Albert Einstein

L'obra més famosa d'Euclides —i una de les obres cimeres de la matemàtica de tots els temps— són els *Elements* (Στοιχεῖα).[2] No és agosarat afirmar que, fins a l'aparició de la *Géométrie* de Descartes (1637), la història de la geometria era la història de l'estudi de l'obra euclidiana. I, fins i tot després de Descartes,

1. «Però la gran consideració de les matemàtiques rau en el fet que les matemàtiques donen a les ciències exactes de la natura un grau de seguretat que sense les matemàtiques no podrien assolir.» Einstein (1921), p. 3.

2. Per a veure la importància extraordinària que tingué l'obra després de la invenció de la impremta, a mitjan segle XV, vegeu la figura de Kayas (1978), p. XXXIX.

calgué esperar el canvi gnoseològic[3] i epistemològic[4] que es produí amb l'aparició de les geometries no euclidianes i la geometria projectiva del segle XIX per a deixar de ser-ho. Aquesta aparició canvià, radicalment, la manera de comprendre el fenomen intel·lectual de la geometria. I, al final, el crit de Dieudonné (vegeu la pàgina 71) provocà un gir en el seu ensenyament a partir de la segona meitat del segle XX.

1.1 Breu descripció de la transmissió de l'obra

Abans d'endinsar-nos en el contingut dels tretze llibres dels *Elements*,[5] farem una breu ressenya de les seves edicions més notables.[6]

El primer erudit que donà a conèixer els *Elements* a l'Occident de parla llatina fou Boeci, però ho féu a partir d'unes conferències de Teó d'Alexandria (Ἀπὸ συνουσιῶν τοῦ Θέωνος).[7] Les conferències de Teó constituïren el text en el qual es basaren totes les edicions anteriors al 1804. A partir d'aleshores es pogué tenir en compte un text anterior al de Teó, que Peyrard trobà

3. Segons el DIEC, la *gnoseologia* és la «teoria filosòfica del coneixement». I, segons el GDLC, «1. Ciència que tracta de la possibilitat, els fonaments, la naturalesa, el valor i els límits del coneixement. 2. Ciència que estudia els principis, les lleis, els postulats i les hipòtesis científiques, i tracta els problemes del mètode, de la unitat i de la divisió de les ciències».

4. Segons el DIEC, «relatiu a l'epistemologia».

5. Recordem que el llibre XIV s'atribueix a Hipsicles i el XV a Isidor de Milet.

6. Per a una presentació molt succinta, vegeu PLA (2012), p. 157–160. I, per a una de més acurada, HEATH (1921), volum I, p. 360–370; KAYAS (1978), volum I, p. XXII–XXXII; i, en particular, VITRAC (1990), capítol II, p. 45–83.

7. I, al comentari a l'*Almagest* de Ptolemeu, Teó afirma que és l'autor d'una redacció d'aquesta obra i que ha establert la demostració d'alguns dels teoremes. HEATH (1921), volum I, p. 360.

a la Biblioteca Vaticana, conegut com el *Codex Vaticanus græcus, 190*.[8]

I, tanmateix, el fragment més antic, trobat fins ara, de l'obra euclidiana, que cal situar pels volts de l'any 100 dC, és el dels papirs d'Oxirrinc (Egipte Mitjà).[9]

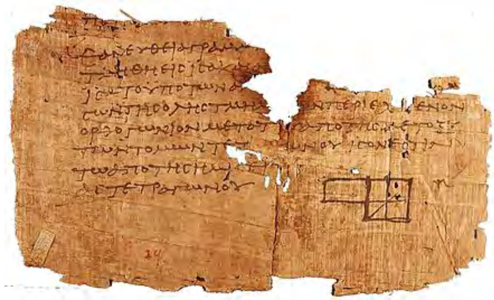


Figura 1.1 Un fragment d'un papir d'Oxirrinc. Mostra el diagrama d'Eii 5 (vg. pàg. 353).

En la literatura romana, el primer autor que menciona Euclides és Ciceró,[10] sense que això impliqui l'existència d'una traducció llatina dels *Elements*. El filòsof parla de l'obra *Disciplinæ* de Terenci Varró sobre les nou disciplines bàsiques: la gramàtica, la didàctica, la retòrica, la geometria, l'aritmètica, l'astronomia, la música, la medicina i l'arquitectura.[11] I Aule Gel·li proporciona —en grec— alguns dels termes i definicions que apareixen als *Elements*.[12] Però és molt probable que no es disposés d'una traducció llatina completa de l'obra

---

8. La publicació, en tres volums, es realitzà del 1814 al 1818. Contenia el text grec i les traduccions llatina i francesa. Vegeu Peyrard (1814-1818) i, per a la traducció francesa, Peyrard (1966).

9. En grec modern, el text diu: «Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ανἴσα, τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνῳ.» Vegeu <http://www.math.ubc.ca/˜cass/Euclid/papyrus/papyrus.html>. Per a més informació, vegeu *Grècia III*.

10. Vegeu el text citat a *Grècia III* i, a més a més, Ciceró (1948), llibre i, ii [5], edició catalana, volum i, p. 10: «Els grecs tenien la geometria en gran honor; ningú era més estimat que els matemàtics. Nosaltres, en canvi, hem reduït aquesta art a la pràctica del mesurament i del càlcul.»

11. Amb aquesta obra, pretén conduir el lector des del que se li mostra al que no se li mostra. Varró esdevé un portaveu del model educatiu grec. Tingué influència, per exemple, en Agustí d'Hipona.

12. Gel·li (1930), llibre i, xx, [1]-[9], edició catalana, volum i, p. 784–785.

fins a finals del segle V o començaments del VI, amb Boeci (480-525).[13]

El segon califa abbàssida,[14] al-Manṣūr (754-775), fundà la ciutat de Bagdad (762), hi instal·là la seva residència (768) i la convertí en la capital del seu califat. Però el moment àlgid de la civilització islàmica s'assoleix durant el regnat del cinquè califa, Abu-Jàfar Hārūn al-Rašīd (786-809). Poc després, el seguí el califa al-Ma'mūn (setè califa abbàssida, 813-833), que féu construir un observatori i la Casa de la Saviesa (832), lloc que tingué, per a la cultura i la ciència àrabs, la mateixa importància que havien tingut, per a Grècia, el Museu i la Biblioteca d'Alexandria. És aleshores quan s'inicià l'empresa islàmica de la traducció d'obres dels pobles veïns: bizantines, gregues, romanes, índies i xineses.

Les dues primeres versions àrabs dels *Elements* són les que féu al-Hajjaj ibn Yūssuf ibn Matar al segle IX: la primera amb el nom d'Haruni i la segona, més fiable, de Mamuni.[15] La traducció va ser millorada posteriorment per Thàbit ibn Qurra. En àrab, la tercera versió d'Euclides que ens ha arribat és d'at-Tussí (1260). No és una traducció del text en concret, sinó una reescriptura basada en les traduccions anteriors.[16]

Després de les àrabs, arriben les traduccions llatines. La primera fou d'Adelard de Bath (∼1130), probablement a partir de la versió àrab d'ibn Matar,[17] impresa amb el nom de Campanus de Novara.[18] L'edició prínceps data de l'any 1482 i la publicà Erhard Ratdolt a Venècia. A aquesta, d'Adelard amb comenta-

13. Cassiodor (1886), I, carta 45, edició electrònica, p. 170.

14. Dinastia àrab de califes que seguí l'omeia i que s'instal·là a Bagdad.

15. Vegeu Dorce (2013), p. 195–197; Busard (1983); i Clagett (1953).

16. En xarxa, <http://www.encyclopedia.com/doc/1G2-2830901349.html>.

17. A Euclides (III aC*c*), s'hi poden consultar moltes edicions clàssiques dels *Elements*.

18. Vegeu Pla (2016*a*).

ris de Campanus, la segueixen moltes més de matemàtics il·lustres dels segles XIII, XIV, XV i XVI, entre les quals cal remarcar, per la influència que tingué, la de Christoph Clavius, *Els quinze llibres dels Elements d'Euclides* (*Euclidis Elementorum libri XV*, 1574).[19]

En l'època moderna, la primera edició en grec de les obres d'Euclides és la del matemàtic escocès David Gregory (Oxford, 1703), amb una traducció al llatí.[20]

FIGURA 1.2 Primera edició dels *Elements*. Venècia, 1482 (vg. pàg. 353).

La primera edició en una llengua europea és la italiana de Tartaglia. Com ja hem indicat abans, caldrà esperar tres segles més per a disposar de la francesa de Peyrard, en grec, llatí i francès, en tres volums i basada en un manuscrit que l'autor trobà a la Biblioteca Vaticana (París, 1814-1818).[21]

I, a finals del segle XIX, arriba l'edició de referència de l'obra d'Euclides en grec. És de Johan Ludvig Heiberg i Heinrich Menge: *Euclidis opera omnia*. I està editada per Teubner, a Leipzig, entre el 1883 i el 1916, en vuit volums.[22]

19. CLAVIUS (1574).

20. En xarxa, a <http://babel.hathitrust.org/cgi/pt?id=mdp.39015069255506;view=1up;seq=7>.

21. PEYRARD (1814-1818). Aquest manuscrit conté també la traducció de les *Dades* (Δεδομένα).

22. Vegeu EUCLIDES (III aC*c*).

L'obra s'ha traduït profusament a moltíssimes llengües. Com diu Boyer:

> Els *Elements* d'Euclides no és només la primera obra, i la més rellevant, de matemàtica que ha arribat fins als nostres dies, sinó també el llibre de text de tots els temps que ha exercit una influència més gran. Foren escrits pels volts del 300 aC i d'aleshores ençà han estat copiats una vegada i una altra sense aturador, amb la conseqüència que inevitablement s'hi filtressin errors i variacions. Fins i tot alguns dels qui els van treballar, com ara Teó d'Alexandria a finals del segle IV dC, van pretendre millorar-ne l'original. I, això no obstant, s'ha aconseguit una impressió força bona dels continguts de la versió euclidiana, comparant més d'una dotzena de còpies manuscrites gregues que daten, la majoria, del segle X al XII de la nostra era. Les ampliacions ulteriors, que normalment apareixen com a escolis, afegeixen informació addicional amb un interès fonamentalment històric i, en la major part dels casos, es diferencien fàcilment del text original. També ens han arribat còpies dels *Elements* en la seva versió àrab que, al segle XII, es van traduir al llatí. Finalment, durant el segle XVI, se'n van realitzar traduccions a les llengües vernacles. La primera versió impresa es realitzà a Venècia l'any 1482 i fou un dels primers llibres matemàtics impresos. S'estima que, d'aleshores ençà, se n'han publicat més d'un miler d'edicions. Segurament, no hi ha cap altre llibre, si excloem la Bíblia, que es pugui vantar d'haver-ne tingut tantes. I, evidentment, cap altra obra matemàtica no ha gaudit d'una influència comparable a la dels *Elements*.[23]

Indiquem-ne les més recents: en català, comentada, a l'apèndix A (pàgines 71–352), i PLA (2016*c*), apèndix A; en castellà, VERA (1970), volum I, p. 687–980, i PUERTAS (1991); en anglès, HEATH (1925) i FITZPATRICK (2008); en francès, KAYAS (1978) i VITRAC (1990); en italià, FRAJESE i MACCIONI (1970), i ACERBI (2007); i, en alemany, HALLER (2008).

23. BOYER (1968), edició castellana del 1986, p. 162.

1.2 Algunes consideracions sobre els *Elements*

Abans d'endinsar-nos en els continguts concrets i específics de l'obra, ens voldríem plantejar tres preguntes.

a) Podem dir que, en la seva època, els *Elements* d'Euclides eren una obra clàssica?[24]

Per a poder respondre aquesta qüestió, cal precisar quin és el significat que donem al terme *clàssic*.[25]

La noció de *clàssic* que s'adiu millor amb la pregunta que acabem de fer és la que trobem a *What is a Classic* (1945), d'Eliot, Premi Nobel de Literatura 1948. El poeta afirma que «el terme *clàssic* incorpora un grau de maduresa compartida entre l'autor i l'ambient de la seva època, tant pel que fa al pensament com a la manera de fer i de parlar.»[26] Amb el verb «incorpora», hem d'entendre que el clàssic aporta alguna cosa nova, que, tanmateix, està totalment impregnada del que l'ha precedit, és a dir, ho té incorporat al bagul dels coneixements i experiències.

Ens podem preguntar, doncs, si l'obra insigne de l'alexandrí respon a aquests trets. Recull l'esperit de la matemàtica grega que l'ha precedit i empra el llenguatge dels seus predecessors?

La resposta, al nostre entendre, és afirmativa. En aquesta obra, Euclides hi aplega una part molt important de la geometria elemental grega dels autors que l'han precedit i la presenta com un tot molt coherent, ben organitzat i elaborat. Aquestes

24. Vegeu Marchini (2006), p. 3.

25. Al diccionari de l'IEC, hi llegim les accepcions següents: «2. Que ha representat la maduresa o un moment culminant dins una literatura, dins un art [. . .], i és considerat un model digne d'imitació. 3.1. Pertanyent a l'antiguitat grega i llatina, a la seva literatura, art, cultura, especialment al període en què es produí la millor literatura, pintura, escultura [. . .]. 3.2. Que ha representat un moment culminant dins un art nacional.» Si bé es centra en la literatura i l'art, el concepte es pot estendre també a altres àmbits del coneixement i del quefer humà.

26. Eliot (1945), p. 8.

qualitats són una aportació personal seva. La raó que ens mena a fer aquesta afirmació és el fet que, amb l'aparició dels seus *Elements*, tots els altres que l'havien precedit queden obsolets, totalment suplantats per l'obra euclidiana, i són tan sols un record històric.

Aquesta primera consideració lliga amb les dues preguntes següents:

b) Podem considerar que els *Elements* d'Euclides són respectuosos amb el progrés històric de la geometria i de les aportacions filosòfiques?

La resposta és, òbviament, afirmativa, perquè són deutors de l'obra filosòfica de Plató i l'Acadèmia, i d'Aristòtil i el Liceu, com s'exposa a «Les aportacions conceptuals de l'obra d'Euclides» (*Grècia III*, § 2.2), on s'analitzen les contribucions conceptuals que trobem en l'obra matemàtica d'Euclides. En síntesi, una estructuració logicometodològica aristotèlica —amb definicions, postulats, nocions comunes i proposicions—, però amb trets ideals propis del pensament platònic —com el significat del nom i el paper ideal de les figures. També veiem que hi incorpora aportacions concretes de totes dues escoles —el concepte general platònic de raó i la limitació aristotèlica de l'infinit, per a esmentar-ne dues.

Però el que ara ens sembla més rellevant, en tant que contribueix a l'anàlisi de l'obra i lliga amb la pregunta *a*, és veure si els *Elements* d'Euclides també són una obra històrica i per què.

El tractat euclidià consta de parts ben diferenciades: α) els quatre primers llibres són pitagòrics; β) el cinquè i el sisè, eudoxians; γ) els tres llibres següents, que haurien hagut de formar part d'una altra obra o presentar-se com a apèndix, contenen l'aritmètica pitagòrica amb una aportació pròpiament euclidiana; δ) el llibre desè —també aritmètic, en un sentit ampli— és fruit de les aportacions de Teodor, Teetet i Demòcrit; ϵ) el següent presenta la geometria elemental de l'espai, forjada probablement a l'Acadèmia de Plató; el dotzè, el càlcul d'àrees i volums en termes de proporcions, i és hipocràtic i eudoxià; i el darrer, amb la construcció dels elements del cosmos, és platònic però amb trets de matemàtics anteriors.

Els *Elements* esdevenen, doncs, una presentació. Responen no només al vessant logicodeductiu imposat per Aristòtil (que excloïa, a través dels postulats del regle i el compàs, la geometria superior desenvolupada per a resoldre els tres problemes clàssics), sinó també a un vessant històric que fa que l'obra sigui, realment, fonamental.

Entre les seves peculiaritats trobem l'ús de la metodologia tangram[27] dels quatre primers llibres —un pèl sofisticada, si es vol—, que queda totalment superada un cop presentats els llibres V i VI, amb la teoria de la proporció d'Èudox. També, alguns teoremes i problemes repetits, com ara l'aplicació d'àrees (llibres II i VI), el teorema de Pitàgores (llibres I i VI) i la mitjana i extrema raó (llibres II i VI). I una voluntat de respectar un nivell conceptualment més elemental, desenvolupat històricament abans, com ara el mètode tangram, sense deixar que la teoria de la proporció d'Èudox, més complexa conceptualment però alhora més simplificadora, se'l mengi.

Pel que fa als llibres aritmètics, podem dir que si, abans de presentar-los i un cop establerts, Euclides hagués classificat les magnituds en commensurables i incommensurables, aquestes darreres haurien esdevingut, de fet, raons numèriques, parts alíquotes o fraccions i, així, la part de teoria numèrica de la proporció desenvolupada als llibres VII,VIII i IX hauria quedat subsumida en les aportacions del llibre V. Però Euclides vol que els llibres aritmètics, encara que es trobin dins els *Elements* de geometria, siguin considerats de manera totalment independent. Com dèiem abans, en són un apèndix o una obra disjunta.

En definitiva, la metodologia aristotèlica permet a Euclides excloure, del món de la geometria elemental grega de la seva època, qualsevol problema geomètric que no sigui resolu-

27. Vegeu la nota 514 (pàgina 153).

ble amb regle i compàs i, tant com pot, el recurs a l'infinit.

c) Això que acabem de veure permet donar resposta a la darrera pregunta: els *Elements* d'Euclides són un text didàctic?

La resposta és, òbviament, afirmativa. No podem dubtar de cap manera que la metodologia logicodeductiva, en els termes aristotèlics, constitueix una eina didàctica de primer nivell. La metodologia, més intuïtiva, de l'escola platònica té un valor indiscutible per a l'obtenció de resultats nous però és difícilment transportable a l'aula, tant si és peripatètica com si no ho és.

En una presentació didàctica, cal fixar una epistemologia que es fonamenti en l'acceptació de la validesa d'uns elements primigenis; una gnoseologia que s'encarregui, precisament, de fixar aquestes veritats, tant les definicionals com les hipotètiques, d'una forma coherent i intel·ligible. I, un cop determinats aquests elements, d'alguna manera més intuïtius, més platònics, s'haurà de fixar el mètode de transmissió des de la veritat primigènia, dels elements primers, fins a la veritat ulterior, la deduïda. Tot això obliga Euclides a presentar l'obra per mitjà de proposicions, problemes i teoremes, la validesa dels quals ha de demostrar sintàcticament. Per aquesta raó, les figures que inclou són ideals. La semàntica, que no es troba pas en les figures sinó en els noms i les definicions,[28] queda relegada als elements primigenis. Aquesta demostració sintàctica es pot transmetre fàcilment malgrat la seva dificultat intrínseca, necessita tècnica, memòria i comprensió de la naturalesa dels objectes que hi apareixen. És una demostració sense semàntica; però la comprensió profunda de la veritat que estableix sí que en té.

En aquest context, el fragment de l'*Eutidem* de Plató és molt suggestiu:

> —Oi que l'art de caçar [—digué Sòcrates—] no és altra cosa que l'art de seguir i capturar les preses? Però, un cop el caça-

28. Recordem, tanmateix, que, en el cas de la geometria, els objectes «són figures», com s'explica al paràgraf dedicat a les figures a *Grècia III*.

dor, o el pescador, ha aconseguit la presa, no sap què fer-ne i la lliura als cuiners. Doncs, això fan precisament els geòmetres, els astrònoms i els calculadors que, de fet, també són caçadors. No creen pas les figures sinó que en descobreixen l'existència. I, atès que no saben usar-les, els qui no són negats del tot les cacen i les lliuren als dialèctics perquè les facin servir.[29]

1.3 Ressenya del contingut dels sis primers llibres dels *Elements*

Per a acabar la presentació de l'obra d'Euclides, farem un resum del contingut dels tretze llibres dels *Elements* i, tot seguit, un comentari dels sis primers, llibre per llibre.[30] Com ja hem dit abans, els quatre primers constitueixen un tractat de geometria plana elemental; el cinquè i el sisè estableixen la teoria de la proporció d'Èudox i les seves aplicacions a la geometria, i clouen la geometria escolar; els tres següents són aritmètics; el desè —el més llarg, complicat d'entendre i obsolet— tracta de la incommensurabilitat en línia i en superfície, i es deu a Èudox, Teodor, Teetet i Demòcrit;[31] els dos següents estudien la geometria de tres dimensions elemental —de fet, els angles dièdrics i les figures sòlides com el prisma, la piràmide, el cilindre, el con i l'esfera—; el penúltim és un tractat de càlcul d'àrees i volums, amb aportacions d'Hipòcrates de Quios, d'Èudox i, probablement, d'Euclides; i el darrer proporciona la construcció dels cinc sòlids platònics i demostra que són els únics.

La taula 1.1 conté el nombre de definicions, postulats, nocions comunes i proposicions de cada llibre. En la mentalitat grega, les proposicions es divideixen en problemes i teoremes. Alguns teoremes van acompanyats de porismes,[32] que avui en dia anomenem corol·laris. A vegades, la validesa d'una proposi-

29. Plató (1928), 290 b 5-290 c 5, edició catalana, p. 141.
30. El comentari dels set restants el farem a *Grècia IIb*.
31. Conté l'algorisme per a determinar ternes pitagòriques numèriques.
32. Vegeu la nota 364 (pàgina 109).

ció depèn que compleixi una condició prèvia, que s'anomena «diorisma».[33] La columna Ll indica el llibre; la D, el nombre de definicions; la P, de postulats; la Nc, de nocions comunes; la E, de proposicions; la Prob., de problemes; la Teor., de teoremes; i la darrera, Por., de porismes, de cada un dels llibres. Algunes proposicions les qualifica de lemes. En tots, les definicions van al davant. Al llibre X, hi ha tres grups de definicions: el primer grup, al començament del llibre; els altres, quan calen.

TAULA 1.1 *Els «elements» dels tretze llibres dels* Elements

Ll	D	P	Nc	E	Prob.	Teor.	Por.	Lem.
I	23	5	5 [o 9]	48	13	35(+2)	(3)	—
II	2	—	—	14	2	12	(1)	—
III	11	—	—	37	6(+1)	31	(3)	—
IV	7	—	—	16	16	—	(2)	
V	18	—	—	25	—	25	(2)[34]	—
VI	3	—	—	33	10	23	(3)	—
VII	22	—	—	39	7	32(+1)	(1)	—
VIII	—	—	—	27	2	25(+1)	(1)	—
IX	—	—	—	36	—	36(+1)	(1)	—
X	4/6/6	—	—	115	24(+3)	(91+12)	(5)	(9?)
XI	28	—	—	39	6	27(+1)	(1)	(1)
XII	—	—	—	18	2	16(+3)	(3)	(2)
XIII	—	—	—	18	6	12(+2+2)	(2)	(3?)

En total, els *Elements* contenen 5 postulats, 5 (o 9) nocions comunes, tots ells al llibre primer, i 130 definicions i 465 proposicions, de les quals 94(+4) són problemes i la resta, teoremes. I, al final de l'explicació de cada llibre, oferirem una taula amb els elements que s'han usat en cadascuna de les proposicions.[35]

Atesa la importància que els filòsofs i els geòmetres grecs donaven a la distinció entre problema i teorema,[36] n'oferim la distribució per a cada llibre:[37]

33. Vegeu PLA (2016*c*), p. 281 i 282, i *Grècia III*.

34. Vegeu la nota 826 (pàgina 272).

35. Les notacions: P 5, Nc 4 signifiquen «postulat 5», «noció comuna 4»; i DI 3, EIII 7, «definició 3 del llibre I», «proposició 7 del llibre III».

36. Vegeu PLA (2016*c*), textos C8 d_1 i d_2, p. 566–570, i el pensament matemàtic d'Euclides, a *Grècia III*.

37. Els lectors interessats en aquesta qüestió poden consultar l'adreça <http://aleph0.clarku.edu/˜djoyce/java/elements/>, on trobaran els enunciats dels problemes en vermell i els dels teoremes, en negre.

Taula 1.2 *Els problemes dels tretze llibres dels* Elements

Llibre	Problemes
I	1, 2, 3, 9, 10, 11, 12, 22, 23, 31, 42, 44, 45 i 46.[38]
II	11 i 14.
III	11, 17, 25, 30, 33 i 34.[39]
IV	Totes setze proposicions.[40]
V	Cap de les vint-i-cinc proposicions.[41]
VI	9, 10, 11, 12, 13, 18, 25, 28, 29 i 30.[42]
VII	2, 3, 33, 34, 35, 36 i 39.[43]
VIII	2 i 4.[44]
IX	Cap de les trenta-sis proposicions.[45]
X	3, 4, 10, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 85, 86, 87, 88, 89 i 90.[46]
XI	11, 12, 22, 23, 26 i 27.[47]
XII	16 i 17.[48]
XIII	13 i lema, 14, 15, 16, 17 i 18.[49]

1.3.1 La geometria plana elemental: llibres I, II, III i IV

Llibre I. *La geometria del triangle*

Des del punt de vista epistemològic, el llibre I és un llibre pitagòric, tant des del punt de vista filosòfic com del matemàtic. És el més important de tots i el que conté l'aportació gnoseològica de l'obra. No és estrany que Procle dediqués una obra a analitzar-lo, aprofundir-lo i comprendre'l: *Comentaris al llibre primer*

38. Els dos porismes d'EI 15 són teoremes.

39. El porisma d'EIII 16 és un problema.

40. Els porismes d'EIV 5 i EIV 15 són teoremes.

41. Els porismes d'EV 7 i EV 19 són teoremes.

42. Els porismes d'EVI 8, 19 i 20 són teoremes. Hi ha autors que les proposicions EVI 28 i 29 les consideren teoremes.

43. El porisma d'EVII 2 és un teorema.

44. El porisma d'EVIII 2 és un teorema.

45. El porisma d'EIX 11 és un teorema.

46. I els lemes EX 14, 29 i 33. En canvi, els porismes d'EX 3, 4, 6, 9 i 23, i els lemes 9, 17, 19, 22, 41, 54 i 60 són teoremes.

47. El porisma d'EXI 33 és un teorema.

48. Els porismes d'EXII 7, 8 i 17, i els lemes EXII 2 i 4 són teoremes.

49. Els porismes d'EXIII 16 i 17, i els lemes EXIII 2 i 18 són teoremes.

dels Elements d'Euclides, molt important històricament i filosòficament.

Com indica la taula 1.1, aquest llibre conté vint-i-tres definicions,[50] cinc postulats[51] i cinc (o nou) nocions comunes.[52] S'hi estableixen quaranta-vuit proposicions de «geometria plana elemental», deu de les quals es demostren «per l'absurd». D'alguna manera, malgrat que implica l'ús de circumferències, és el llibre de la línia recta i de les figures rectilínies: els triangles i els paral·lelograms. I s'hi donen les eines per al «tangram generalitzat».

A més, hi queda ja ben palès des del principi que, en el si de la geometria euclidiana, les proposicions es classifiquen en «problemes» i «teoremes». En concret, catorze —les proposicions EI 1, 2, 3, 9, 10, 11, 12, 22, 23, 31, 42, 44, 45 i 46— són problemes; la resta, teoremes.

Alguns autors hi inclouen dos porismes d'EI 32 que estableixen que «la suma dels angles interns d'un polígon més quatre angles rectes és igual a tantes vegades dos angles rectes com costats té el polígon» i que «la suma dels angles externs val quatre angles rectes».

▶ **Exercici 1**. Demostreu la validesa de tots dos porismes. [*Indicació.* Pel que fa al primer, considereu un punt interior, uniu-lo amb els vèrtexs i useu EI 32. Pel que fa al segon, tingueu en compte que l'angle intern i l'extern corresponent sumen dos angles rectes (DI 10).] ◀

Les definicions (ὅροι).[53] Com ja hem dit abans, la doctrina que hi ha sota les definicions dels *Elements* és aristotèlica,[54] si ente-

50. Vegeu A.1.1*a* (pàgines 76–81).

51. Vegeu A.1.1*b* (pàgines 81–84).

52. Vegeu A.1.1*c* (pàgines 84–85).

53. En grec, la paraula ὅρος significa 'terme', en el sentit de línia de terme, frontera. Encara avui usem l'expressió *terme* per a indicar el nom que donem a un objecte, per exemple, «amb aquest terme indiquem...», i l'hem transportat a l'àlgebra i la lògica per a assenyalar els símbols que representen els objectes. Vegeu A.1.1*a* (pàgines 76–81).

54. Vegeu la mentalitat de Plató i Aristòtil a Pla (2016*c*), p. 267.

nem «aristotèlica» en el sentit que no diu res de l'existència o no existència de l'element que es defineix.[55] Com diu Caveing: «[Les definicions] responen a la pregunta "Què és això? (τὸ ὅτι)" i no pas a la pregunta "Això és? (εἵναι)".»[56] Ara bé, aquesta doctrina també és platònica, si creiem que hi ha dos aspectes en tota definició, el *quid nominis* —quin nom té?— i el *quid rei* —quina és la cosa denominada?[57] Fixem-nos en la diferència essencial: en el primer cas, a la definició, s'imposa el nom i l'existència caldrà establir-la;[58] en el segon, s'imposa el nom i el vincle que té amb un objecte que respon a una idea que preexisteix independent del nom i la definició, de la qual solament capten l'ombra (B 2.2c_1 i c_2 de *Grècia III*).

De fet, les primeres definicions són falses definicions perquè es basen en conceptes no definits:[59]

Di 1. Un *punt* és el que no té parts.

Di 2. Una *línia* [, en general,] és una longitud[60] sense amplada.

Di 3. Els *extrems* d'una línia són punts.[61]

Di 4. Una *línia recta* és la que descansa igualment damunt tots els punts.

La definició Di 3 diu que totes les línies tenen extrems; és a dir, són limitades i, d'acord amb Di 2, de longitud finita. Això fa que sigui impossible considerar una prolongació a l'infinit efectiva, és a dir, «en acte». En conseqüència, una línia és sem-

55. Aristòtil (1988), *Analítics segons*, ii, 7, edició castellana, p. 404–407.

56. Vitrac (1990), volum i, p. 125.

57. Marchini (2006), p. 20.

58. Això és important, atès que, per exemple, l'heptàgon —un cop definit— pot no existir; o la duplicació del cub tampoc. Per això cal buscar la manera de donar-los existència.

59. Boyer (1968), edició castellana, p. 116.

60. D'alguna manera, s'hi exclou l'infinit en acte perquè, conceptualment, no hi ha longituds infinites. Vegeu Di 3 i l'explicació que segueix Di 4 (pàgina 77).

61. De fet, s'hi amaga un postulat: «Totes les línies tenen extrems i aquests extrems són punts.»

pre un «segment» i una línia recta un «segment rectilini», que és l'expressió que usarem al text, malgrat que sigui poc usual, perquè entenem que s'adiu amb la mentalitat geomètrica grega.

Di 5, 6 i 7. Les definicions anàlogues per a les superfícies imposen, implícitament, que les superfícies són limitades, fitades i tancades per línies.

Di 8. Un *angle pla* és la mútua inclinació de dues línies d'un mateix pla que es toquen però que no es troben damunt un mateix segment.[62]

Di 9. Quan les línies són rectes (l'angle) és *rectilini*.

Di 10. Quan un segment s'aixeca damunt un altre formant angles adjacents iguals, cada un dels segments és [un angle] *recte*. El segment que s'aixeca damunt l'altre s'anomena [segment] *perpendicular* a l'altre.

Di 11. Un *angle obtús* és més gran que un angle recte.

Di 12. Un *angle agut* és més petit que un angle recte.[63]

Di 13 i 14. Dues definicions. La primera: «El *límit* és l'extrem de quelcom.» I la segona: «La *figura* és quelcom comprès entre un o diversos límits.»[64] Totes dues definicions palesen que les «figures» sempre estan tancades per «contorns», és a dir, sempre són limitades.

Di 15. Un *cercle* és una figura plana limitada per una sola línia —la *circumferència*—[65] de manera que tots els segments que hi cauen damunt, des d'un punt que es troba entre els seus punts interiors, són iguals.

Di 16. Aquest punt s'anomena *centre* del cercle.[66]

62. Vegeu B 2.2n_1 i B 2.2n_2 de *Grècia III*.

63. De fet, per Euclides, això significa que en el primer cas conté un angle recte, i que en el segon es pot inscriure dins un angle recte.

64. Unes definicions ben pobres.

65. Curiosament, aquesta línia no té extrems; és un contorn de la figura cercle. I, tanmateix, és limitada. De fet, d'acord amb Di 13, és un límit o contorn.

66. I, de retruc, de la circumferència.

DI 17. Qualsevol segment rectilini que passa pel centre del cercle i té els extrems en un costat i l'altre de la circumferència n'és un *diàmetre*. Aquest segment divideix el cercle en dues parts iguals.[67]

▶ **Exercici 2**. Sabríeu demostrar l'afirmació de Simson? ◀

DI 18. Un *semicercle* és la figura limitada per un diàmetre i la perifèria. El *centre* del semicercle és el mateix que el del cercle.[68]

▶ **Exercici 3**. Demostreu que el centre del semicercle és el mateix que el del cercle. ◀

DI 19. La *figura rectilínia* és aquella que té com a límits segments rectilinis. La podem classificar, segons el nombre de costats, en *trilàtera*, *quadrilàtera* i *multilàtera*.[69]

DI 20 i 21. Els triangles —figures rectilínies trilàteres— es classifiquen segons dos criteris. En primer lloc, d'acord amb el nombre de costats iguals —*triangle equilàter*, *isòsceles* i *escalè*, segons que tingui tres costats iguals, dos o cap. En segon lloc, segons la naturalesa dels angles —*triangle rectangle* i *obtusangle*, amb un angle recte o obtús, respectivament, i *triangle acutangle*, amb tres angles aguts.

DI 22. En el cas dels quadrilàters, el *quadrat* és equilàter i equiangle; el *rectangle* és equiangle però no equilàter; el *rombe* és equilàter però no equiangle; el *romboide*, sense ser ni equilàter ni equiangle, té els costats i els angles oposats iguals. La resta de figures quadrilàteres són *trapezis*.

En aquest sentit, resulta interessant la comparació de DI 20 i DI 22, en què classifica els quadrilàters rectilinis. Si, en el cas

---

67. De fet, és una propietat del segment descrit abans i, per tant, una proposició. Si s'agafés com a definició, s'hauria d'establir que un segment que uneix dos punts de la circumferència i divideix el cercle en dues parts iguals passa necessàriament pel centre.

Simson observa que això és una conseqüència immediata de DIII 1, EIII 24 i EIII 31.

68. La definició del centre del semicercle és la mateixa que la del cercle; per tant, aquesta afirmació és un teorema que s'hauria de demostrar.

69. Fixem-nos que, indirectament, hi queden definides les figures de tres, quatre o més de quatre angles, respectivament.

dels triangles, en té prou amb els costats —i la naturalesa dels angles queda determinada, com es demostrarà més endavant—, en el cas dels quadrilàters li calen els costats i els angles. És, doncs, una qüestió de finesa.

I arribem a la darrera definició, que trenca amb tota l'epistemologia aristotèlica dels ens geomètrics perquè introdueix l'«infinit en acte», però que, d'altra banda, és irrenunciable perquè proporciona el concepte bàsic per a poder introduir el postulat P 5, que caracteritza la geometria euclidiana.

DI 23. Dos segments rectilinis són *paral·lels* quan, situats en un mateix pla, encara que els prolonguem fins a l'infinit, mai es troben.

Observem que, en aquest punt, Euclides trenca la limitació aristotèlica més ben observada fins ara; necessita usar l'infinit «en acte». D'això en resulta, doncs, que les «rectes»[70] paral·leles no constitueixen una figura perquè «les figures tenen límits». I, això no obstant, en les demostracions usarà segments paral·lels en comptes de rectes paral·leles.

I un apunt final. Euclides no defineix el *paral·lelogram*.[71]

Els postulats (αἰτήματα).[72] Quatre dels cinc postulats que ofereix Euclides als *Elements* són d'existència, mentre que n'hi ha un que és d'igualtat, en la línia de la noció comuna Nc 4 però molt més geomètric.

Els postulats P 1 i P 3 indiquen que, donats dos punts [diferents], «existeixen» el segment rectilini que els té com a extrems

70. No són segments, ja que cal considerar-ne l'extensió infinita.

71. Val la pena indicar que no defineix el *paral·lelogram* però, tanmateix, usa aquest nom —i l'objecte geomètric que designa— moltes vegades, tant en aquest llibre com en els posteriors. Vegeu, per exemple, EI 33, 34, 35 i 36, un cop introduït l'ús de P 5; i DII 1 i 2.

72. Vegeu A.1.1*b* (pàgines 81–84). Pel que fa als postulats, podeu consultar ZEUTHEN (1896), FRAJESE (1950) i FRAJESE (1951), a més de les obres que contenen les traduccions més recents dels *Elements* d'Euclides amb notes i comentaris (pàgina 6).

i el cercle limitat per una circumferència que té un dels punts com a centre i passa per l'altre.

Això fa que, malgrat que Plató imposa a la geometria que recorri als postulats,[73] segons Aristòtil, el caràcter existencial és indispensable per a bastir un coneixement científic.[74] Tant en l'ús de les definicions com en el dels postulats trobem la dualitat platonicoaristotèlica dels *Elements*.

El postulat P 2 és de caràcter operatiu i respon a l'afirmació aristotèlica: «Tot segment rectilini es pot prolongar un segment rectilini [donat].» I això, segons l'estagirita, evita haver de recórrer a les rectes infinites.[75] Aquest postulat és, doncs, instrumental i existencial.

Ara bé, Euclides no diu enlloc que, tant en el postulat P 1 com en el P 2, hi hagi unicitat:[76]

P 1′. El segment determinat pels dos punts —els extrems— és «únic». Mai hi ha dos segments que tanquin l'espai, és a dir, dos segments diferents o són paral·lels o es tallen en un sol punt. Euclides usa aquest postulat a la demostració d'Eɪ 4.

P 2′. La prolongació a cada banda del segment és «única». És a dir, dos segments diferents no poden tenir un segment comú.

Segons Procle, la imposició de la unicitat —que és essencial— fou observada i comentada per l'epicuri Zenó de Sidó.[77] En concret, a la demostració d'Eɪ 1, P 2′ és necessari. I a Eɪ 4, s'usa implícitament P 1′.[78]

El postulat P 5 —el «postulat dels paral·lels»— mostra la genialitat d'Euclides. Estableix una condició suficient per tal que dos segments donats, convenientment prolongats, es tallin.

---

73. Pla (2016*c*), C $1d_2$, p. 515 i 290; Pla (2018*b*), B $2.1b_1$ i B $2.2a_1$.

74. Pla (2016*c*), C 11.4*b* (p. 585-586).

75. Pla (2016*c*), C 11.6*h* (p. 597).

76. Vegeu la nota 252 (pàgina 82–83).

77. Procle (1970), 215 a 218; edició anglesa, p. 168–170; i francesa, p. 189–192.

78. Vegeu el problema 1 (pàgina 60).

És un postulat d'existència, de l'existència del punt de tall. En imposar-lo, Euclides evita l'infinit en acte. Tanmateix, P 5 té tota l'estructura d'un teorema i la seva «evidència» —cosa que hom pressuposa en els postulats— és dubtosa. Segons Procle, a Grècia i en temps del mateix Euclides, els geòmetres ja van considerar que era necessari demostrar-ho; no en qüestionaven la validesa, qüestionaven que es pogués admetre com a postulat. Els intents de demostrar el postulat dels paral·lels van perdurar fins al segle XIX.[79]

▶ **Exercici 4**. Quan dos segments es tallen, cal la condició del postulat P 5? ◀

Potser per aquesta raó, Euclides evita l'ús de P 5 fins a la proposició EI 29.

En canvi, el postulat P 4 és un postulat d'igualtat: els angles rectes damunt segments diferents són iguals.[80]

▶ **Exercici 5**. Useu el fet que el diàmetre divideix el cercle en dues parts iguals per a establir que:
a) El segment limitat per dos punts és únic.
b) La prolongació d'un segment és única.
[*Indicació.* Suposeu que el segment té els extrems A i B. Useu el cercle de centre A que té la circumferència que passa per B. HEATH (1921), volum I, p. 196–197.]

Exercici 6. Proveu que:
a) El diàmetre d'un cercle el divideix en dues parts iguals?
b) Si una corda divideix un cercle en dues parts iguals és un diàmetre, és a dir, passa pel centre? [*Indicació.* HEATH (1921), volum I, p. 175–176.]

Exercici 7. És possible demostrar el postulat P 4? [*Indicació.* Considereu, d'una banda, un segment perpendicular BA a un segment CD; i, d'una altra, un angle recte $\widehat{EFG}$, diferent dels dos angles rectes

79. HEATH (1925), volum I, p. 220, recull una desena d'enunciats de P 5 alternatius.

80. Pel que fa al possible caràcter constructiu d'aquest postulat, vegeu el comentari de la pàgina 83.

$\widehat{BAC}$ i $\widehat{BAD}$, que determina BA a CD. Construïu un angle $\widehat{CAR}$ igual a $\widehat{EFG}$. Què passa?] ◀

Les nocions comunes (κοιναὶ ἔννοιαι).[81] Normalment, seguint la tradició de Heiberg, se'n proporcionen cinc, però hi ha edicions que en proporcionen nou.[82] Solament comentarem les cinc més usuals. Les tres primeres fan referència al comportament de la igualtat: propietat transitiva i compatibilitat amb la suma i la resta.[83] La cinquena és filosòfica —«El tot és sempre més gran que cada una de les parts»— i evita que el «tot» sigui considerat com una «part». Podria ser que aquesta noció només s'imposés per tal d'evitar les «paradoxes» de l'infinit, però això no sembla gaire probable, atès que l'infinit s'ha exclòs. I, malgrat que les altres quatre nocions comunes són aristotèliques, aquesta cinquena lliga amb el diàleg entre Sòcrates i Críties del *Càrmides* (Χαρμίδης) de Plató, en què parlen de la saviesa moral:

> SÒCRATES. En canvi, quan es tracta del saber, imaginem, em sembla, una ciència que, sense tenir un objectiu particular propi, té com a objectiu totes les altres ciències i també la mateixa ciència.
> CRÍTIES. Aquesta és, efectivament, la nostra proposició.
> SÒCRATES. I no et sembla que si existeix, és absurda? Però no diguem encara que no existeix. Abans de fer-ho, busquem si existeix.
> CRÍTIES. D'acord.
> SÒCRATES. Diem que aquesta ciència té un objectiu determinat i gaudeix d'una virtut pròpia que li permet aconseguir l'objectiu. És exacte, això?

81. Vegeu A.1.1*c* (pàgines 84–85).
82. Vegeu, per exemple, VERA (1970), volum I, p. 705; i VITRAC (1990), p. 178–179. En canvi, HEATH (1925), volum I, p. 232–234, recull altres axiomes —postulats i nocions comunes— que s'usen implícitament en l'obra, i la nota 263 (pàgina 85).
83. Vegeu SZÁBÓ (1960).

CRÍTIES. Del tot.
SÒCRATES. Així afirmem que el que és més gran té la virtut de ser més gran que una altra cosa.
CRÍTIES. Efectivament, la té.
SÒCRATES. Més gran que una cosa més petita, en ser major, no?
CRÍTIES. Necessàriament.
SÒCRATES. Si trobem, doncs, una magnitud més gran que les altres magnituds més grans i que ella mateixa, però no més gran que cap de les magnituds més petites, resultaria que aquesta magnitud més gran, en tant que és més gran que si mateixa, seria alhora més petita. D'acord?
CRÍTIES. La conseqüència, Sòcrates, és efectivament necessària.
SÒCRATES. Així doncs, una cosa que fos el doble de les coses que són dobles i de si mateixa seria el doble d'aquesta meitat de la qual aquesta cosa està constituïda, de la mateixa manera com les altres coses de les quals fos el doble, ja que una cosa només pot ser el doble d'una meitat.
CRÍTIES. Ben cert.[84]
SÒCRATES. Serà alhora més gran i més petita que si mateixa; i el que és més pesant que si mateix seria més lleuger; el que és més vell que si mateix, més jove, etc. Sigui quina sigui la virtut intrínseca d'una cosa, no és veritat que la seva essència quedi determinada per l'efecte que aquesta virtut sigui capaç de produir?
[...]
SÒCRATES. Així doncs, Críties, en tots els exemples que hem analitzat, en uns és insostenible i en altres és molt dubtós que la virtut pròpia de cada cosa pugui produir l'efecte en si mateixa. En les magnituds, els nombres i altres coses semblants, és evidentment impossible. No et sembla que és així?
CRÍTIES. En efecte.[85]

84. Per a una anàlisi de la contradicció íntima com a indici segur d'error a Sòcrates, vegeu XENOFONT (1923), IV, 6, edició catalana, p. 126–131.
85. *Càrmides*, a PLATÓ (1966-1969), p. 278–279.

La quarta noció comuna és, de fet, de caràcter geomètric i s'hauria de trobar en la llista dels postulats. Imposa que si dos objectes geomètrics es poden superposar són iguals. I, perquè això passi, és necessari el moviment;[86] però aquesta igualtat és intrínseca, és a dir, anterior al moviment. Així, Euclides evita que una figura es deformi quan es desplaça, cosa que també pretén amb el postulat P 4, restringit a angles rectes. En general, no obstant això, un angle és pot «transportar sense moure'l» (Eɪ 23).

Euclides usa el moviment a Eɪ 4 i 8 (els dos primers criteris d'igualtat de triangles), però l'evita a Eɪ 26 (el tercer criteri). Això l'obliga a fer una demostració un pèl llarga per a evitar l'ús del moviment, que li agradava tan poc.

Aquesta situació planteja dues menes d'igualtats d'objectes geomètrics:[87] la igualtat per superposició, anomenada «congruència», que nosaltres anomenarem «igualtat»; i la igualtat de longitud, àrea o volum de figures no superposables directament,[88] que anomenarem «equivalència». En el cas dels segments rectilinis i dels angles, totes dues igualtats coincideixen. En el cas dels segments rectilinis, ho imposa la Nc $9'$. I, en el cas dels angles, com dèiem unes línies més amunt, Eɪ 23.

Abans d'entrar de ple en l'anàlisi de les proposicions concretes, val la pena retornar al caràcter eminentment constructiu dels *Elements* —íntimament vinculat a l'existència—, que ja hem comentat a bastament en d'altres indrets. Ara, però, aquest caràcter pren un significat molt més clar, ja que disposem dels fonaments bàsics sobre els quals ens hem de moure, els que fixen les limitacions conceptuals i geomètriques.[89]

86. Pla (2010), p. 46–49.

87. Quan Euclides, en les nocions comunes, usa l'expressió «igual» o «desigual», entén les dues menes d'igualtat indistintament.

88. Però que, en alguns casos, poden ser recompostes per tangram.

89. Vegeu Zeuthen (1896).

Si observem la manera com procedeix Euclides en el desenvolupament metodològic, veurem que mai usa un objecte geomètric abans d'haver-lo construït. Per exemple, a Ei 5, on estableix la igualtat dels angles de la base d'un triangle isòsceles, no recorre a la bisectriu de l'angle oposat a la base, que hauria simplificat enormement la demostració, perquè construeix la bisectriu a Ei 9 i, per tant, no és fins aleshores que pot afirmarne l'existència. I això mateix ho veiem en altres indrets. Per exemple, no usa el quadrat en cap demostració abans d'haverlo construït a Ei 46.[90]

La construcció tal com l'entén Euclides, com la resolució d'un problema mitjançant les eines establertes, és efectiva i no teòrica. Així evita l'existència teòrica per «continuïtat», que no postula fins al llibre v quan introdueix l'arquimedianitat, un aspecte parcial de la continuïtat. L'existència d'un valor mitjà[91] permetria acceptar l'existència, per exemple, de la bisectriu sense necessitat de construir-la.

Considerem l'angle $\widehat{BAC}$ i el segment AC, que idealment —no cal que el moviment sigui real— es desplaça del costat AB a l'AC. En el camí passa pels dos angles $\widehat{BAD}$, $\widehat{DAC}$: el primer, més petit; el segon, més gran, fins a arribar als dos $\widehat{BAE}$, $\widehat{EAC}$: el primer, més gran; el segon, més petit. Per continuïtat, aquest segment ha de passar per la situació AM, en la qual els angles $\widehat{BAM}$, $\widehat{MAC}$ són iguals. Per tant, *existeix la bisectriu* però no s'ha construït factualment. L'existència simplement s'ha deduït.[92]

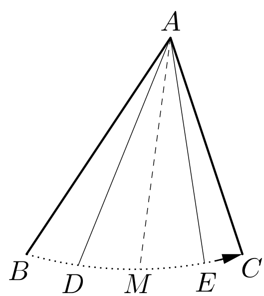


Figura 1.3 La bisectriu AM de l'angle $\widehat{BAC}$ per continuïtat amb moviment ideal.

90. Per a fer-ho necessita el postulat P 5.

91. De fet, és la continuïtat tal com l'entendrà Bolzano molts segles més tard. És el principi de Bolzano.

92. Vegeu Frajese i Maccioni (1970), p. 62.

Malauradament, Euclides no pot mantenir sempre aquesta mena de rigor: basar l'existència en la construcció. De vegades es troba amb situacions en les quals aplica una existència que s'ha establert en un cas particular (per exemple, la dels segments rectilinis), però, en canvi, no és capaç d'establir-la en el cas general (la de les superfícies i volums) i més general (la de les magnituds de naturalesa arbitrària).

Exii 2 és un exemple concret d'això, com veurem en el moment oportú, ja que, tal com hem indicat en un altre indret,[93] afirma categòricament que, donades tres àrees, és possible trobar-ne una quarta que sigui la quarta proporcional de les tres donades.[94] I, més agosarat encara, suposa l'existència d'un volum que és el quart proporcional de tres volums donats perquè, *mutatis mutandis*, aplica al volum de l'esfera el mateix raonament que havia usat en l'àrea del cercle.[95]

Per a acabar, indiquem que a Ex 6 Euclides afirma que existeix la partició d'una magnitud arbitrària en k parts iguals. Per a fer-la, usa novament un resultat que solament ha construït en el cas dels segments rectilinis, i ho fa per extensió existencial i conceptual.[96]

I, si bé és cert que a Dv 4 estableix, com a definició, el principi d'Arquimedes, és a dir: «Per a cada parella de magnituds $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$, existeix un nombre natural k que permet garantir que $k\,\mathfrak{A} > \mathfrak{B}$»,[97] no podem garantir l'existència d'una magnitud intermèdia $\mathfrak{C}$ entre $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$, donada per endavant, perquè el principi d'Arquimedes és discret —depèn dels naturals— i no garanteix la continuïtat de la relació d'ordre de les magnituds.

---

93. Vegeu Pla (2010), ítem (1), p. 126.

94. És una extensió, a les àrees, d'Evi 12, en què aconsegueix construir la quarta proporcional de tres segments rectilinis donats.

95. Es tracta d'Exii 18.

96. Vegeu Evi 10.

97. Pel que fa referència a les mancances d'aquest enunciat considerat com una definició i al seu caràcter intrínsec de postulat, vegeu la indicació de la pàgina 49 i la nota 798 (pàgina 266).

Les proposicions.[98] Les proposicions d'aquest llibre bàsic es poden classificar, fonamentalment, en tres grups i dues categories: de la proposició EI 1 a l'EI 26 (les relatives a les propietats dels triangles i neutrals); de l'EI 27 a l'EI 31 (les relatives als paral·lels: les EI 27, 28 i 31, neutrals; les EI 29 i 30, euclidianes); i de l'EI 33 a l'EI 48 (les relatives a les àrees de paral·lelograms, triangles i quadrats, també euclidianes). Aquestes proposicions fan referència, doncs, a algunes propietats dels triangles, tant les que no depenen de P 5 («neutrals») com les que en depenen («euclidianes»). Per exemple, s'hi estableixen els criteris d'igualtat de triangles (neutrals) [EI 4, 8 i 26] i el fet que la suma dels angles d'un triangle és igual a dos angles rectes (euclidià) [EI 32]. S'hi analitzen algunes de les conseqüències del paral·lelisme i s'hi estableixen els lemes previs per a poder aplicar el mètode tangram generalitzat en algunes demostracions, un mètode que es recupera amb força al llibre II. S'hi donen els fonaments necessaris per a establir la quadratura dels polígons rectilinis. Hi trobem també les proposicions relatives a l'existència de (segments) perpendiculars i de paral·lels, i a la possibilitat de dimidiar segments i angles. Finalment, s'hi estableix que el teorema de Pitàgores caracteritza els triangles rectangles.

En concret, això es materialitza en una geometria neutral i una d'euclidiana.[99]

Geometria neutral[100]

EI 1 i 22. Existeix un triangle equilàter de costat donat i un triangle arbitrari de costats donats sotmesos a un diorisma.[101]

98. Vegeu A.1.1*d* (pàgines 86–153).

99. A VITRAC (1990), p. 518, hi ha un diagrama dels lligams deductius de les proposicions d'aquest llibre. Vegeu la taula 1.3 (pàgines 31–32).

100. La demostració de les proposicions no depèn de P 5, ni directament ni indirectament.

101. És el primer diorisma dels *Elements*. Vegeu la pàgina 28.

EI 2. Sense moviment, podem transportar un segment donat amb un extrem en un punt donat. És a dir, el compàs «sense memòria» —la circumferència queda determinada per dos punts— té les mateixes capacitats que el compàs «amb memòria» —la circumferència queda determinada pel centre i el radi.

EI 3. Existeix el segment sostracció de dos segments donats.[102]

▶ **Exercici 8**. Què cal fer per a saber si és possible sumar dos segments donats per endavant? ◀

EI 4, 8 i 26. Hi ha tres criteris d'igualtat de triangles: CAC i CCC (demostrats usant el moviment) i ACA (demostrat sense usar-lo).

EI 5 i 6. El fet que un triangle tingui dos angles iguals és condició necessària i suficient perquè sigui isòsceles.[103]

EI 9 i 10. Un angle i un segment es poden dimidiar.[104]

▶ **Exercici 9**. Pappos fa servir EI 4 per a establir EI 5 usant un recurs de marcat caràcter simbòlic. Quin? [*Indicació.* Useu les dues representacions simbòliques —$\triangle\, CAB$ i $\triangle\, BAC$— per a indicar els triangles isòsceles de vèrtex superior A, i vèrtexs a la base B i C, i C i B, respectivament. Useu-ho formalment.] ◀

EI 11 i 12. Existeix el segment perpendicular a un segment donat des d'un punt donat tant si és del segment com si és exterior al segment.[105]

---

102. L'existència de la suma de dos segments donats està inclosa a P 2 si entenem que tot segment donat es pot prolongar un segment arbitrari donat per endavant. Per tant, és una conseqüència de P 2, EI 2 i P 3.

103. La demostració d'EI 5 és directa, d'una gran elegància, i hauria de ser un text de lectura obligada. La demostració d'EI 6 és la primera demostració indirecta, per l'absurd, és a dir, s'hi accepta la hipòtesi complementària de l'absurd que nega el que es vol demostrar. Té interès perquè és la primera proposició en la qual podem observar que les figures d'Euclides són «idealitzacions» —fins i tot quan són aparentment geomètriques—, atès que hi «raona» usant com a element auxiliar una figura que no és possible però que pretén ajudar a copsar els passos de la deducció.

104. Són simples corol·laris d'EI 1.

105. A EI 12 i a EI 22, Euclides usa l'«infinit en acte».

▶ **Exercici 10**. Proveu EI 9, 10, 11 i 12, usant regle i *a*) compàs sense memòria, *b*) compàs amb memòria.
Exercici 11. El segment perpendicular és únic? [*Indicació.* Vegeu el problema 8 (pàgina 61).] ◀

EI 31. Existeix el segment paral·lel a un segment donat que passa per un punt exterior.[106]

▶ **Exercici 12**. Com us ho faríeu per a tirar un segment paral·lel a un segment AB des d'un punt P exterior a AB? [*Indicació.* No cal P 5.]
Completeu-ho amb el problema 2 (pàgina 60). ◀

EI 13 i 14. Dos segments que es troben en un punt estan alineats si, i només si, un tercer segment incideix en el punt de contacte formant angles que sumen dos angles rectes.

EI 15. Els angles oposats pel vèrtex són iguals.[107]

EI 16. L'angle extern d'un triangle és més gran que qualsevol dels angles interns no adjacents.[108]

EI 17. Dos angles d'un triangle sempre sumen menys de dos angles rectes.

EI 18 i 19. En un triangle, el costat més gran s'oposa a l'angle més gran, i recíprocament.

EI 20. En tot triangle, dos costats junts fan més que el tercer costat. És un diorisma d'EI 22.

EI 22. Donats tres segments, és possible construir un triangle els costats del qual siguin iguals als segments donats. Per a fer-ho, cal el diorisma anterior.[109]

106. Aquesta proposició hauria d'estar col·locada abans d'EI 29 perquè no necessita P 5. De fet, és un porisma d'EI 23 i 27. Fixem-nos que, curiosament, no hi ha la unicitat del paral·lel. La demostració d'aquesta unicitat sí que depèn de P 5. Això pot fer pensar que EI 31 potser és incompleta, en el sentit que hauria d'enunciar i establir l'«existència i unicitat» del paral·lel.

107. Alguns autors afegeixen un porisma: «Quan dos segments es tallen, els quatre angles [junts] fan quatre angles rectes.»

108. La demostració és interessant perquè suposa que un segment rectilini diferent dels costats i que passa pel vèrtex d'un angle no talla cap dels costats de l'angle —els segments no es torcen—, però talla l'altre costat.

109. A la demostració, usa una semirecta il·limitada. Hi intervé, doncs,

▶ **Exercici 13**. Donats tres segments MN, PQ i RS, construïu un triangle que tingui els costats iguals als segments donats. ◀

EI 23. És possible construir un angle igual a un angle donat.[110]

▶ **Exercici 14**. Donats un segment AB i un angle $\widehat{MON}$, sabríeu construir l'angle $\widehat{BAC}$ igual a l'angle donat, amb un costat damunt el segment AB i el vèrtex a l'extrem A? ◀

EI 24 i 25. Si dos triangles tenen dos costats iguals, l'angle que formen és més gran si, i només si, la base és més gran.

EI 27 i 28. Una secant talla dos segments paral·lels formant angles alterns i corresponents iguals. S'hi estableixen, doncs, les condicions suficients per al paral·lelisme de segments.

Geometria euclidiana[111]

EI 29. Les condicions anteriors —EI 27 i 28— són necessàries.

EI 30. El paral·lelisme de segments és transitiu.

EI 32. Els tres angles d'un triangle sumen dos angles rectes.[112]

EI 33 i 34. Paral·lels entre paral·lels són iguals. La diagonal divideix un paral·lelogram en dues parts iguals.

EI 35 a 38. Paral·lelograms i triangles amb bases iguals i amb el costat o el vèrtex oposat en un segment paral·lel tenen la mateixa àrea, és a dir, són equivalents.[113] S'hi estableixen, doncs, les bases del mètode tangram.

EI 39 i 40. Són inversos parcials d'EI 37 i 38.

EI 41. Un paral·lelogram és el doble [pel que fa a l'àrea] d'un tri-

l'infinit en acte.

110. És un corol·lari d'EI 22. Com ja hem indicat abans, en el cas dels segments i els angles, els conceptes «congruent» i «equivalent» coincideixen. Per això, solament diem que són iguals.

111. La demostració de les proposicions depèn directament o indirectament de P 5.

112. Vegeu l'observació feta a EI 32 de la pàgina 14.

113. Hi ha autors que diuen «són iguals», entenent que tenen la mateixa superfície.

angle amb la mateixa base i entre els mateixos [segments] paral·lels.

▶ **Exercici 15**. Demostreu que dos paral·lelograms, amb bases còngrues [superposables] en un segment i el costat oposat a la base en un mateix segment paral·lel al que conté les bases, tenen la mateixa superfície. Deduïu-ne que això també val per als triangles. ◀

EI 42. És possible construir un paral·lelogram, amb un costat i un angle donats, igual a un triangle[, és a dir, amb la mateixa àrea].[114]

▶ **Exercici 16**. Proveu EI 42 i, en tot cas, constateu que implica que tot polígon regular es pot convertir en un paral·lelogram. ◀

EI 43. Els gnòmons d'un paral·lelogram són iguals.[115]

▶ **Exercici 17**. Proveu-ho. ◀

EI 44 i 45. Es poden calcular les bases de la quadratura dels polígons rectilinis.[116]

EI 46. Existeix un quadrat de costat donat.

▶ **Exercici 18**. Construïu un quadrat de costat donat i demostreu que, efectivament, això que heu construït és un quadrat. ◀

EI 47 i 48. S'hi demostren el teorema de Pitàgores per a triangles rectangles, i el seu recíproc.[117]

▶ **Exercici 19**. Proveu:
a) El teorema de Pitàgores usant el mètode tangram. [*Indicació.* Vegeu el problema 16 (pàgina 62).]
b) Si un triangle compleix el teorema de Pitàgores, és rectangle necessàriament. [*Indicació.* Useu la hipòtesi de l'absurd i l'ítem *a*.] ◀

---

114. S'hi inicia la «quadratura de les figures poligonals».

115. Hi anticipa resultats que li caldran a EII.

116. La demostració d'EI 44, basada en el mètode tangram i EI 42, és molt enginyosa.

117. La demostració d'EI 47, per tangram, és d'una gran elegància i hauria de formar part de les lectures dels clàssics. S'atribueix a Euclides que sigui tan original. El recíproc es demostra per l'absurd, d'acord amb l'anterior.

Taula 1.3 *Dependències dels «elements» del llibre* I

EI	D	P	Nc[118]	E
1	15, 20	1, 3	1	—
2	15, 20	1, 2, 3	1, 3	I 1
3	15	3	1	I 2
4	—	—	$4, 9'$	—
5	—	1, 2	3	I 3, 4
6	—	1	5	I 3, 4
7	—	1	5	I 5
8	—	—	4	I 7
9	20	1	—	I 1, 3, 8
10	20	—	—	I 1, 4, 9
11	10, 20	1	—	I 1, 2, 3, 8
12	10, 15	1, 3	—	I 8, 10
13	10	—	1, 2	I 11
14	—	2, 4	1, 3, 5	I 13
15	—	4	1, 3	I 13
16	—	1, 2	5	I 2, 3, 4, 10, 15
17	—	2	$4'$	I 13, 16
18	—	1	5	I 3, 5, 16
19	—	—	—	I 5, 18
20	—	1, 2	5	I 2, 5, 19
21	—	2	$4'$	I 16, 20
22	15	1, 3	1	I 2, 3
23	—	1	—	I 8, 22
24	—	1	5	I 2, 4, 5, 19, 23
25	—	—	—	I 4, 24
26	—	1	1, 5	I 3, 4, 16
27	23	2	—	I 16
28	—	4	1, 2, 3	I 13, 15, 27
29	23	2, **5**	$1, 2, 4'$	I 13, 15
30	—	—	1	I 27, 29
31	—	1, 2	—	I 23, 27
32	—	2	1, 2	I 13, 29, 31
33	—	1	—	I 4, 27, 29
34	—	1	2	I 4, 26, 29
35	—	—	1, 2, 3	I 4, 29, 34
36	—	1	1	I 33, 34, 35
37	—	1, 2	$6'$	I 33, 34, 35

118. Hi esmentem les nou nocions comunes de la nota 263 (pàgina 85): $1 = 1', 2 = 2', 3 = 3', 4 = 7', 5 = 8', 4', 5', 6'$ i $9'$.

Pel que fa a les notacions, consulteu Pla (2016*c*), nota 99, p. 71, o la nota 35 (pàgina 12).

TAULA 1.3 *Dependències dels «elements» del llibre* I (continuació)

EI	D	P	Nc[118]	E
38	—	1, 2	6′	I 31, 34, 35
39	—	1	1, 5	I 31, 37
40	—	1	1, 5	I 31, 38
41	—	1, 2	1 o 5	I 34, 37
42	—	1, 2	1, 2	I 10, 23, 31, 34, 38, 41
43	—	1	2, 3	I 34
44	—	1, 2, 5	1, 8′	I 15, 29, 30, 31, 42, 43
45	22	1	1, 2	I 14, 29, 30, 33, 34, 42, 44
46	22	4	1, 3	I 2, 3, 11, 29, 31, 34
47	—	1, 4	1, 2, 5′	I 4, 14, 30, 31, 41, 46
48	—	1	1, 2	I 2, 3, 8, 11, 47

LLIBRE II. *La geometria algebritzada*

Aquest llibre és breu. Conté dues definicions i catorze proposicions, de les quals solament dues són problemes; la resta, les altres dotze, són teoremes.[119]

Les definicions.[120] Les dues definicions són:

DII 1. Tot paral·lelogram rectangular *està contingut* —determinat— per dos segments rectilinis que formen l'angle recte.

DII 2. En tota superfície paral·lelogramàtica, el *gnòmon* és qualsevol paral·lelogram al voltant de la diagonal i els dos complements.

Les proposicions.[121] Les proposicions EII 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 i 10 estableixen les equivalències que hi ha entre les àrees rectangulars[122] determinades per la secció (i/o la prolongació) d'un segment. Si considerem que els segments són mesurables, aques-

119. Per a la dependència deductiva, vegeu la taula 1.5 (pàgines 35–36).

120. Vegeu A.1.2*a* (pàgines 156–157).

121. Vegeu A.1.2*b* (pàgines 157–182).

122. Usarem la paraula «superfície» per a referir-nos a una figura plana, en general, i la paraula «àrea» per a referir-nos a la superfície concreta de la figura en qüestió, que, en el món algèbric, seria un valor numèric concret. Vegeu la nota 215 (pàgina 77).

tes relacions es transformen en igualtats algèbriques —cosa que trobarem en la matemàtica oriental. Per aquesta raó, es diu que el llibre II dels *Elements* és un llibre d'«àlgebra geometritzada» o «geomètrica».

Si admetem que la suma correspon a la juxtaposició de segments, la diferència a la sostracció i el producte al rectangle, tindrem, en concret:

TAULA 1.4 *Taula esquemàtica de la proposició EII 1 a l'EII 10*

EII 1.	$m\,(a+b+c+\cdots) = m\,a + m\,b + m\,c + \ldots$
EII 2.	$(a+b)\,a + (a+b)\,b = (a+b)^2.$
EII 3.	$(a+b)\,a = a^2 + \,b\,a.$
EII 4.	$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2\,a\,b.$
EII 5.	$a\,b + \left(\frac{a+b}{2} - b\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2,$ o bé $(\alpha+\beta)\,(\alpha-\beta) = \alpha^2 - \beta^2.$[123]
EII 6.	$(2\,a+b)\,b + a^2 = (a+b)^2,$ o bé $(\alpha+\beta)\,(\alpha-\beta) = \alpha^2 - \beta^2.$[124]
EII 7.	$(a+b)^2 + a^2 = 2\,(a+b)\,a + b^2,$ o bé $\alpha^2 + \beta^2 = 2\,\alpha\,\beta + (\alpha-\beta)^2.$
EII 8.	$4\,(a+b)\,a + b^2 = ((a+b)+a)^2,$ o bé $4\,\alpha\,\beta + (\alpha-\beta)^2 = (\alpha+\beta)^2.$
EII 9.	$a^2 + b^2 = 2\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2} - b\right)^2\right),$ o bé $(\alpha+\beta)^2 + (\alpha-\beta)^2 = 2\,(\alpha^2 - \beta^2).$
EII 10.	$(2\,a+b)^2 + b^2 = 2\left(a^2 + (a+b)^2\right),$ o bé $(\alpha+\beta)^2 + (\alpha-\beta)^2 = 2\,(\alpha^2 - \beta^2).$

Euclides, però, les enuncia en termes geomètrics. Per exemple, EII 1 i EII 10 les expressa així:

EII 1. Si tenim dos segments i en dividim un en un cert nombre de parts [subsegments], el rectangle contingut pels dos segments [donats] és igual[125] al rectangle contingut pel segment íntegre i cada una de les parts [del segment dividit].

EII 10. Tallem un segment en dues parts iguals i el prolonguem un segment. El quadrat del segment total més la prolongació i el

123. Correspon a l'ἔλλειψις, 'aplicació en el·lipse'.
124. Correspon a la ὑπερβολή, 'aplicació en hipèrbola'.
125. És superposable per tangram.

quadrat de la part prolongada, junts, equivalen[126] al doble del quadrat [construït] damunt la meitat [del segment donat] i el quadrat el costat del qual s'obté ajuntant el segment meitat del segment donat i el segment afegit a un segment.

Les proposicions EII 5 i EII 6 fan referència a l'«aplicació d'àrees» d'un quadrat d'àrea donada b^2 damunt un segment de longitud donada a per defecte i per excés, respectivament.[127] De fet, Euclides posposa el problema general al llibre VI, però ja mostra ara que, amb regle i compàs, és possible resoldre les equacions $(a-x)\times x = b^2$ (amb el diorisma corresponent) i $(a+x)\times x = b^2$. De fet, aquí retrobem el problema mesopotàmic:[128] «Dividiu un segment donat de manera que les parts formin un rectangle d'àrea donada, i prolongueu-lo de manera que el total i la part prolongada formin un rectangle d'àrea donada.»

▶ **Exercici 20**. Proveu EII 5 i EII 6, *a*) algèbricament [*Indicació.* És fàcil.]; *b*) geomètricament [*Indicació.* És més delicat.].

En el cas *b*, és possible determinar el punt de divisió i l'extrem de la prolongació amb regle i compàs?

Constateu que les equacions de segon grau $(a - x) \times x = b^2$ (amb el diorisma corresponent) i $(a + x) \times x = b^2$ s'han resolt amb regle i compàs. ◀

La proposició EII 11 és un problema i ens demana que dividim un segment donat en «mitjana i extrema raó» amb regle i compàs. En termes euclidians diu: «Dividiu una recta donada de tal manera que el rectangle comprès entre la recta sencera i un dels segments (el petit) sigui igual al quadrat del segment que queda (el gran).»

▶ **Exercici 21**. Sabríeu fer-ho? Feu-ho. ◀

Les proposicions EII 12 i EII 13 generalitzen el teorema de Pitàgores als triangles obtusangles i acutangles. En la terminologia trigonomètrica actual —molt posterior a l'època grega—

126. És superposable per tangram.
127. Vegeu les notes 123 i 124 (pàgina 33).
128. Vegeu PLA (2016*b*), p. 204.

s'engloben en el que es coneix com el «teorema del cosinus», que diu: «Si a, b i c són les longituds dels tres costats d'un triangle i $\hat{A}$, $\hat{B}$ i $\hat{C}$ els angles oposats, aleshores $a^2 = b^2 + c^2 \pm 2\, a\, b\, \cos \hat{A}$.»

▶ **Exercici 22**. Sabríeu demostrar-ho? Feu-ho. ◀

El llibre s'acaba amb el problema que faltava per a veure que tota figura poligonal rectilínia és quadrable. De fet, Euclides estableix el «teorema de l'altura d'un triangle rectangle», és a dir, constata que «tot rectangle és quadrable». I ho fa sense recórrer a la teoria de la proporció, usant l'aplicació d'àrees o, altrament dit, el mètode tangram.

▶ **Exercici 23**. Feu un quadrat que tingui la mateixa àrea que un rectangle donat. Sabríeu fer-lo per aplicació d'àrees? ◀

Si unim aquest resultat a EI 45, la quadratura de les figures poligonals rectilínies queda tancada. Així s'estableix definitivament un dels resultats pitagòrics notables.[129]

▶ **Exercici 24**. Demostreu que tota figura poligonal és quadrable. ◀

Com ja hem dit abans, aquest llibre posa de manifest la voluntat explícita d'Euclides de respectar el relat històric: proporciona la resolució amb regle i compàs de problemes que s'havien plantejat, molt probablement, a l'escola pitagòrica. Són problemes que retrobarà al llibre VI, un cop establerts els elements de la teoria general de la proporció. En aquest nou context, són més fàcils de resoldre, com EI 47, que esdevé un porisma d'EVI 8. La voluntat de generalitzar el teorema de Pitàgores palesa també aquesta voluntat, molt remarcable des del punt de vista de la història de la geometria grega, de recuperar les resolucions amb el regle i el compàs.

TAULA 1.5 *Dependències dels «elements» del llibre II*

EII	D	P	Nc[118]	E
1	II 1	—	1, 2	I 2, 3, 11, 31, 34
2	II 1	—	1, 2	I 30, 31, 46
3	II 1	2	1, 2	I 30, 31, 46

129. Vegeu l'ítem *e* de la geometria pitagòrica, a PLA (2016*c*), p. 144.

TAULA 1.5 *Dependències dels «elements» del llibre II* (continuació)

EII	D	P	Nc[118]	E
4	II 1	1,4	1, 2	I 5, 6, 29, 30, 31, 34, 43, 46
5	II 1, 2	1	1, 2	I 10, 30, 31, 36, 43, 46, II 4 porisma
6	II 1, 2	1, 2	1, 2	I 10, 30, 31, 36, 43, 46, II 4 porisma
7	II 1, 2	—	1, 2	I 43, 46, II 4 porisma
8	II 1, 2	2	1, 2	I 2, 3, 34, 36, 43, 46, II 4 porisma
9	—	1, 4	1, 2, 3, 6	I 2, 3, 5, 6, 10, 11, 29, 31, 32, 34, 47
10	—	1, 2, 4, 5	1, 2, 3, 6, 8	I 2, 3, 5, 6, 10, 11, 15, 29, 31, 32, 34, 47
11	II 1	1, 2	1, 3	I 12, 3, 10, 46, 47, II 6
12	—	1, 2	1, 2	I 12, 47, II 4
13	—	—	1, 2	I 12, 47, II 7
14	I (15), 18, II 1	1, 2, 3	1, 3	I 2, 3, 10, 45, 46, 47, II 5

LLIBRE III. *La geometria del cercle i la circumferència*

El llibre III s'atribueix a Hipòcrates de Quios i està totalment dedicat a l'estudi de les propietats del cercle i la circumferència. Conté onze definicions i trenta-set proposicions relatives al cercle, la tangent, les cordes, els segments circulars i la potència d'un punt a la circumferència del cercle. S'hi estableix la invariància de la potència.

Aquest llibre presenta una organització deductiva menys sòlida que la dels dos llibres anteriors.[130] Si descartem la proposició EIII 1, conté catorze proposicions que són independents de les

130. Vegeu la taula 1.6 (pàgines 42–43).

d'abans.[131] Tretze no s'usen mai als *Elements*.[132] Solament les inclouen Eiii 15, 29, 30 i 37.[133] I, això no obstant, cal remarcar que les proposicions posteriors a Eiii 16 són necessàries per a establir l'existència del pentàgon regular inscrit en un cercle.[134]

Les definicions.[135] La primera definició, Diii 1, determina la igualtat de dos cercles —i, de retruc, de dues circumferències— quan tenen els diàmetres —o els radis— iguals.[136] La segona, Diii 2, defineix la tangent (ἐφάπτεσθαι) com aquell segment que, encara que el prolonguem, solament «toca» la circumferència.[137]

A continuació hi ha la definició de cercles tangents, quan les circumferències respectives es toquen. Les definicions quarta i cinquena estableixen en quin cas dues cordes disten del centre el mateix o una més que l'altra. Òbviament, quan els segments perpendiculars a les cordes des del centre són iguals, o quan un és més gran que l'altre.

I, seguidament, el llibre dóna cinc definicions més delicades que estableixen els conceptes de «segment circular», «angle d'un segment», «angle en un segment», «sector circular» i «segments circulars semblants».

Diii 6. *Segment circular* (τμῆμα κύκλου) és la [figura] limitada per una corda del cercle i un dels arcs de la circumferència que determina.

---

131. Són Eiii 2, 3, 5, 6, 7, 8, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 20 i 23. Vegeu Mueller (1981), p. 178.

132. Són Eiii 4, 7, 8, 12, 13, 15, 25, 29, 30, 33, 34, 35 i 37. Vegeu Mueller (1981), p. 178.

133. Vegeu Mueller (1981), p. 178.

134. Vegeu l'esquema deductiu a Vitrac (1990), p. 519.

135. Vegeu A.1.3*a* (pàgines 183–186).

136. De fet, congruents.

137. Exclou que la «talli», és a dir, que la toqui en dos o més punts. Quan es tracta d'un segment i una corba, o de dues corbes, s'usen els verbs «tocar» i «tallar» per a indicar que només tenen un punt en comú o més d'un, respectivament.

DIII 7. *Angle «d'un» segment* (ἐν τμήματι δὲ γωνία) és el que determinen la corda i l'arc.[138]
DIII 8. *Angle «en un» segment* (τμήματος δὲ γωνία)[139] és l'angle que determinen els segments tirats des d'un punt qualsevol de l'arc als extrems de la corda que determina l'arc.[140]
DIII 10. *Sector circular* (τομεύς δὲ κύκλου)[141] és la figura que determinen els costats d'un angle central[142] i l'arc que els costats determinen [quan tallen la circumferència].
DIII 11. *Segments circulars semblants* (ὅμοια τμήματα κύκλων) són aquells que admeten angles iguals o aquells en els quals els angles són iguals entre si.

Les proposicions.[143] Entre les proposicions podem observar una certa organització temàtica que ens permet agrupar-les així: EIII 1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 14 i 15; EIII 5, 6, 10, 11, 12 i 13; EIII 16, 17, 18 i 19; EIII 20, 21 i 22; EIII 23, 24 i 25; EIII 26, 27, 28, 29 i 30; EIII 31, 32, 33 i 34; i EIII 35, 36 i 37. En concret, les quatre primeres proposicions caracteritzen el centre i analitzen algunes propietats de les cordes.

EIII 1. És possible determinar el centre del cercle. I demostrar, per l'absurd, que el punt que s'ha determinat ho és.

► **Exercici 25**. Determineu el centre d'un cercle donat i vegeu que el punt que heu determinat és el centre. ◄

EIII 2, 3 i 4. Els segments que uneixen dos punts de la circumferència del cercle sempre són interiors al cercle. I un segment divideix la corda en dues parts iguals si, i només si, passa pel centre del cercle.

---

138. És, doncs, un angle mixtilini i lliga amb DI 8, EI 5, i EIII 16 i 31.
139. Avui l'anomenen «angle inscrit en un segment» o «angle capaç».
140. La definició següent completa aquesta. Diu que l'angle «s'apunta-la» als extrems de la corda que defineix el segment.
141. Actualment, aquest nom es manté.
142. És a dir, un angle amb el vèrtex al centre del cercle i els radis corresponents com a costats.
143. Vegeu A.1.3*b* (pàgines 186–237).

▶ **Exercici 26**. Proveu:

a) Un segment que uneix dos punts d'una circumferència és interior al cercle.

b) Un segment dimidia una corda si, i només si, [convenientment prolongat] passa pel centre. ◀

Les proposicions EIII 7 i 8 indiquen quins segments, tirats des d'un punt de dins del cercle a la circumferència, i quines secants, des d'un punt exterior, són més grans o més petits, respectivament, que el diàmetre, i la secant que passa pel centre.

EIII 9. El fet que es puguin tirar tres o més segments iguals sobre la circumferència, des d'un punt interior, implica que el punt és el centre.

▶ **Exercici 27**. Un punt interior d'un cercle és el centre si almenys tres dels segments amb un extrem al punt i l'altre [extrem] a la circumferència són iguals. ◀

Les proposicions EIII 14 i 15 estableixen una condició necessària i suficient per tal que una corda sigui igual, més gran o més petita que una altra, és a dir, estableixen la relació de les llargades que han de tenir els segments perpendiculars a la corda des del centre.

▶ **Exercici 28**. Proveu que dues cordes d'un cercle són iguals si les «distàncies» del centre a la corda ho són. Quina relació cal imposar entre aquestes distàncies com a condició necessària i suficient per tal que una sigui més llarga que l'altra? ◀

EIII 5 i 6. Si dos cercles es tallen o es toquen, no poden tenir el mateix centre.

EIII 10. Dos cercles no poden tenir més de dos punts en comú.

Val la pena indicar que Euclides no explicita mai en quines condicions es tallen dos cercles. No disposa, doncs, d'un postulat P 5 per a cercles o circumferències. Vet aquí el punt feble de la demostració d'EI 1, en què es dóna per fet que les circumferències que tenen els centres a cada un dels extrems d'un segment i que passen per l'altre extrem es tallen «necessàriament».

▶ **Exercici 29**. Proveu EIII 10. ◀

EIII 11 i 12. La recta que uneix els centres dels cercles les circumferències dels quals són tangents [tant si ho són interiorment com si ho són exteriorment] passa [convenientment prolongada en el cas de la tangència interior] pel punt de tangència.

EIII 13. Dos cercles tangents no es toquen mai en més d'un punt.

Les proposicions EIII 16, 17, 18 i 19 fan referència a la construcció i les propietats de la tangent:

EIII 16. La perpendicular al diàmetre d'un cercle per un dels extrems és tangent a la circumferència del cercle i determina l'«angle de contacte», que és més petit que qualsevol angle rectilini.[144]

EIII 17. És possible tirar una tangent a una circumferència des d'un punt exterior al cercle.[145]

EIII 18 i 19. Un segment és perpendicular a la tangent al punt de tangència si, i només si, passa pel centre del cercle i, de retruc, [convenientment prolongat] conté el diàmetre.

▶ **Exercici 30**. Proveu l'afirmació anterior. ◀

Les proposicions EIII 20, 21 i 22 estudien les propietats dels angles central i inscrit:

EIII 20. L'angle central val el doble que l'angle inscrit amb el mateix arc.

EIII 21. Tots els angles «en» un segment són iguals.[146]

▶ **Exercici 31**. Proveu EIII 20 i EIII 21. ◀

---

144. Malgrat que l'enuncia com un teorema, conté un problema, ja que estableix l'existència de la tangent a una circumferència per un punt de la circumferència. Però diu més coses.

145. És un problema.

146. D'alguna manera, justifica la definició d'«angle *en* un segment» perquè no depèn de l'elecció del vèrtex. Per tant, ens permet parlar de «l'angle *en* el segment». Aquest teorema es coneix amb el nom de «l'angle inscrit que abraça un arc o una corda», que els subtendeix, en definitiva, l'«angle capaç».

EIII 22. Hi ha una condició necessària perquè un quadrilàter es pugui inscriure, és a dir, sigui «inscriptible» en un cercle.

► **Exercici 32**. Quina és la condició que ha de tenir un quadrilàter perquè sigui inscriptible en un cercle? És una condició suficient? ◄

Les proposicions EIII 23, 24 i 25 analitzen propietats elementals de les cordes i els segments «semblants» que determinen en dos cercles iguals:

EIII 23 i 24. Damunt una corda no és possible fer dos segments semblants i damunt cordes iguals els segments semblants són iguals.[147]

EIII 25. Un segment de cercle determina el cercle.[148]

Les proposicions EIII 26, 27, 28, 29 i 30 s'apliquen a les relacions existents entre la terna «angle, arc i cercle».

EIII 26, 27, 28 i 29 estableixen que, en cercles iguals, els arcs iguals subtendeixen angles centrals i inscrits, i cordes, iguals.

EIII 30. Consisteix a dimidiar un arc donat.[149]

Les proposicions EIII 31, 32, 33 i 34 estudien les propietats dels angles en els segments circulars.

EIII 33. Fa un segment circular damunt un segment donat que determina un angle donat.

EIII 34. En un cercle donat, fa un segment d'angle donat.

Les proposicions EIII 35, 36 i 37 són molt importants. Introdueixen la «potència» d'un punt a una circumferència i el seu caràcter invariant. A més, aquesta potència caracteritza la tangent.[150]

► **Exercici 33**. Donat un punt P [interior o exterior] a un cercle, tirem un segment que passi per P i talli la circumferència a A i B. La

147. A la demostració d'EIII 24 Euclides necessita el moviment.

148. És un problema perquè diu com s'ha de fer.

149. És, doncs, un problema.

150. Com ja hem dit abans, aquests resultats són necessaris per a construir el pentàgon regular inscrit en un cercle donat.

«potència» de P a la circumferència és el rectangle determinat per PA i PB. I és invariant, és a dir, depèn de la circumferència donada i del punt P, però no del segment que hàgim tirat. Demostreu-ho. ◀

TAULA 1.6 *Dependències dels «elements» del llibre* III

EIII	D	P	Nc[118]	E
1	I 10	1, 2, 4	5	I 1, 2, 8, 10, 11
2	I 15	1, 2	5	I 5, 9, 16, 19, III 1
3	I 10	1, 4	—	I 5, 8, 26, III 1
4	—	1, 4	5	III 1, 3
5	I 15	1	1, 8′	—
6	I 15	—	1, 8′	—
7	I 15	1	1, 3*	I 4, 20, 23, 24, III 1
8	I 15	1	1, 2	I 4, 20, 21, 23, 24, III 1 porisma
9	I 10	1, 2	—	I 8, 10, III 1 porisma
10	—	1, 2	9′	I 10, 11, III 1 porisma, 5
11	I 15	1, 2	5	I 20, III 1, 6
12	I 15	1	5	I 20, III 1
13	I 15, III 6	1	5	III 1, 2, 11
14	I 15, III 4	1	1, 2, 3, 5′	I 12, 47, III 1, 3
15	I 15, III 5	1, 2	2	I 3, 11, 12, 20, 24, III 1,14
16	—	1, 4	5	I 5, 11, 12, 17, 19
17	I 15	1, 3, 4	—	I 4, 11, III 1, 16 porisma
18	—	1	5	I 12, 17, 19, III 1
19	—	1, 4	5	I 11, III 1, 18
20	I 15	1, 2	1, 2, 3	I 5, 32

TAULA 1.6 *Dependències dels «elements» del llibre* III (continuació)

EIII	D	P	Nc[118]	E
21	—	1	$6'$	III 1, 20
22	—	1	1, 2	I 32, III 21
23	III 11	1, 2	—	I 16
24	—	—	4	III 10
25	I 10, 15	1, 2, 3, 4	1, 5	I 4, 6, 10, 11, 23, III 9
26	III 1, 11	1	3	I 4, III 20, 24
27	—	—	$1, 6', 5$	I 23, III 20, 26
28	III 1	1	3	I 8, III 1, 26
29	III 1	1	—	I 4, III 1, 27
30	—	1, 4	—	I 4, 10, 11, III 28
31	I 10	1, 2, 4	1, 2, 5	I 5, 17, 32, III 22
32	—	1, 4	1, 2, 3	I 11, 13, 19, 22, 31, 32
33	I 15	1, 3, 4	1	I 4, 10, 11, 23, III 16 porisma, 31, 32
34	—	—	1	I 23, III 17, 32
35	—	1	1, 2, 3	I 12, 47, II 5, III 1, 3
36	I 15	1	1, 2, 3	I 12, 47, II 6, III 1, 3, 17, 18
37	I 15	1	1, 2	I 8, III 1, 16 porisma, 17, 18, 36

LLIBRE IV. *Els polígons regulars construïbles amb regle i compàs*

Aquest llibre conté set definicions però, de fet, DIV 3 i 6, i DIV 4 i 5 són iguals, amb un simple canvi de nomenclatura: s'hi substitueix «figura inscrita» per «circumferència circumscrita», i «figura circumscrita» per «circumferència inscrita», respectivament. I també conté setze proposicions. És un llibre força elemental. Tracta de la construcció de polígons regulars, inscrits i circumscrits en un cercle, construïbles amb regle i compàs: en concret, el triangle equilàter, el quadrat, l'hexàgon, el pentàgon i el pentadecàgon. L'únic d'aquests problemes que presenta una mica de dificultat és el que consisteix a inscriure un pentàgon en un cercle (EIV 11). Aquest és, de fet, el resultat més important d'aquest llibre i justifica algunes proposicions de l'anterior. Depèn d'EII 5, 6 i 11, i de la segona part del llibre III.

Totes les proposicions són problemes. I EIV 1 i 10 són lemes: donat el cercle, s'hi pot fer el polígon inscrit i circumscrit; i donat el polígon, el cercle inscrit i circumscrit.[151]

Els resultats són, d'alguna manera, independents: s'agrupen per a cada polígon; però, en general, els obtinguts per a un polígon no fan cap falta en la construcció dels altres, llevat de la del pentadecàgon, que depèn de la del decàgon.[152]

Les definicions.[153] L'única cosa que fan les definicions DIV 1, 2, 3, 4, 5 i 6 és precisar què s'entén per «figura inscrita» i «circumscrita» en una figura i en un cercle. Són, de fet, les definicions naturals i no tenen cap interès remarcable.

La DIV 7 dóna una descripció del que avui anomenem «corda» d'un cercle: «Un segment *s'ajusta a un cercle* quan té els extrems en la circumferència corresponent.»[154]

Les proposicions.[155] Comentem, d'entrada, les dues proposicions auxiliars:

151. Vegeu el quadre a VITRAC (1990), p. 469.

152. MUELLER (1981), p. 189-193.

153. Vegeu A.1.4*a* (pàgines 239–240).

154. Fixem-nos que, de fet, l'hauria d'haver establert al llibre III, que és on correspondria que fos d'una manera natural. Ho fa aquí perquè el necessita com a «element».

155. Vegeu A.1.4*b* (pàgines 240–264).

EIV 1. Hi ha un procediment per a trobar una corda de longitud donada, inferior a la del diàmetre,[156] en un cercle donat.

EIV 10. Hi ha una manera per a construir un triangle isòsceles que tingui cada un dels angles de la base igual al doble de l'angle del vèrtex. Euclides necessita aquest resultat, fruit de l'anàlisi del pentàgon, a l'hora de construir un pentàgon regular inscrit en un cercle. La construcció que fa Euclides és delicada i es basa en EII 11 i EIII 37.

▶ **Exercici 34**. Proveu:
a) El triangle format per dues diagonals que ixen d'un vèrtex d'un pentàgon regular i el costat oposat és un triangle isòsceles que té la propietat del triangle que es construeix a EI 10.
b) Dues diagonals d'un pentàgon regular es tallen en un punt que les divideix en mitjana i extrema raó. [*Indicació.* Useu la teoria de la proporció.] ◀

Les proposicions EIV 2, 3, 4 i 5 fan referència als triangles. En concret, estableixen la manera com s'inscriu i es circumscriu, en un cercle donat, un triangle amb els mateixos angles que un de donat.[157] I també la manera de fer-ho quan el triangle és arbitrari. De fet, el porisma afirma: «Tres punts no alineats determinen una circumferència.»

▶ **Exercici 35**. Feu-ho. ◀

Les proposicions EIV 6, 7, 8 i 9 fan referència als quadrats. Les dues primeres resolen el problema d'inscriure i circumscriure un quadrat en un cercle donat; les altres dues inscriuen i circumscriuen un cercle en un quadrat donat.

▶ **Exercici 36**. Feu-ho. ◀

Les proposicions EIV 11, 12, 13 i 14 fan referència als pentàgons regulars. En primer lloc, s'hi explica la manera de construir un pentàgon regular inscrit en un cercle. En segon lloc, la

156. Heus aquí un diorisma.

157. Avançant-se al llibre VI, mostra la manera de construir triangles «semblants» a un de donat.

de construir el pentàgon regular circumscrit. I, en tercer lloc, com fins ara, la d'inscriure i circumscriure un cercle en un pentàgon regular donat.

L'hexàgon regular solament l'inscriu, i ho fa a EIV 15.

▶ **Exercici 37**

a) Inscriviu un hexàgon regular en un cercle donat.

b) Sabríeu circumscriure'l?

c) I, com en els altres casos, sabríeu inscriure i circumscriure un cercle en un hexàgon regular donat? ◀

La proposició EIV 16 mostra la manera d'inscriure un pentadecàgon regular en un cercle.

▶ **Exercici 38**

a) Sabríeu fer-ho?

b) Sabríeu completar aquest resultat amb els que falten? [*Indicació.* Vegeu l'exercici anterior.] ◀

En aquest punt, Euclides acaba el llibre IV. És el més senzill de tots i tanca la geometria plana elemental.

Als *Elements* queda, doncs, establert que, amb regle i compàs, es poden construir el triangle equilàter, el quadrat, el pentàgon regular i el pentadecàgon regular. I, naturalment, també es poden construir tots els polígons que tenen el doble de costats que un de ja construït, atès que EI 9 mostra la manera de dimidiar un angle;[158] per tant, l'hexàgon, l'octògon, el decàgon, el dodecàgon, etc.

TAULA 1.7 *Dependències dels «elements» del llibre IV*

EIV	D	P	Nc[118]	E
1	I 15	3	1	I 3, III 1, 15
2	—	1	1, 3	I 23, 32, III 17, 32
3	I 22	1, 2, 4, 5	1, 3	I 11, 13, 23, 32, III 1, 16 porisma, 18

158. Per tant, la construcció de l'hexàgon, que tracta especialment, no li calia haver-la fet, ja que estableix la manera de construir el triangle equilàter a EI 1.

TAULA 1.7 *Dependències dels «elements» del llibre* IV (continuació)

EIV	D	P	Nc[118]	E
4	I 15, 22	1, 3, 4, 5	1	I 9, 12, 26, III 10, 16
5	—	1, 3, 4, 5	1	I 4, 10, 11
6	I 15, 22	1	1, 2, 4	I 4, 11, III 31
7	I 22	2, 4	1	I 11, 28, 30, 34, III 1, 17, 18
8	I 15	3, 5	1, 6′	I 43, 46, III 16
9	I 15	1, 3, 5	1, 6′	I 6, 8
10	—	1, 3	1, 2	I 2, 5, 6, 32, II 11, III 32, 37, IV 1, 5
11	—	1	1, 2, 6′	I 9, III 26, 27, 29, IV 2, 10
12	I 10, 15	4	1, 2, 3, 5′	I 8, 26, 47, III 1, 16 porisma, 18, 27, IV 11
13	—	1, 3, 4, 5	1, 2, 5′	I 4, 9, 12, 26, III 16
14	—	1, 3, 5	1, 6′	I 6, 9, (IV 13)
15	I 15, 20	1, 2, 3, 4	1, 2, 3	I 5, 13, 15, 32, III 1, 26, 27, 29
16	—	1	2, 3	III 28, 30, IV 1, 2, 11

1.3.2 La teoria de la proporció d'Èudox i la seva aplicació a la geometria: llibres V i VI

Euclides dedica dos llibres a la teoria general de la proporció, que, com ja hem indicat en un altre indret, és obra d'Èudox.[159]

159. PLA (2016*c*), p. 313 i següents.

El primer llibre, EV, proporciona un seguit d'aportacions que transcendeix la geometria d'una manera que recorda el que s'esdevenia amb les nocions comunes, perquè estableix —enuncia i demostra— proposicions «per a magnituds», és a dir, aplica la teoria —o el mètode— a «les quantitats que es poden mesurar [amb parts contínues]», en termes aristotèlics.[160]

En canvi, el segon llibre, EVI, aplica la teoria general de la proporció als objectes geomètrics, en particular, als triangles, d'on fa derivar la majoria dels resultats. I obté els resultats elementals d'aquesta teoria quan s'aplica a la geometria, en particular, el teorema de Tales per a línies i per a superfícies.[161]

LLIBRE V. *La teoria general de la proporció d'Èudox*

Aquest llibre consta de disset definicions, vuit de les quals són «nominatives», i de vint-i-cinc proposicions de caràcter operatiu, és a dir, que exposen la manera de manejar les raons i les proporcions amb les operacions d'ajuntar, sostreure, multiplicar, partir, invertir, compondre i alternar termes.[162]

Les definicions.[163] De primer, introdueix els conceptes de magnitud «part» i «múltiple» d'una altra magnitud (DV 1 i 2).

160. Aquest concepte de magnitud sorprèn. Els geòmetres grecs recorren a les «magnituds» per la impossibilitat de mesurar el que és incommensurable, mancat, per tant, de la quantitat (numèrica) corresponent. Per a distingir-les de les «pluralitats discretes», Aristòtil diu: «La *magnitud* és divisible en parts contínues.» ARISTÒTIL (2000), llibre V 13, 1020 a 10 i 12, edició castellana, p. 238 (vegeu la nota 797, pàgina 266). Designarem les magnituds amb les lletres $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{P}, \ldots$, i amb subíndexs si cal.

161. Arquimedes, als treballs de geometria, segueix les petjades dels llibres VI i XII d'Euclides i usa una teoria ja establerta. Això li permet evitar en tot moment aquest caràcter general i limitar les seves proposicions a la teoria de la proporció entre línies, superfícies i sòlids.

162. Vegeu KLINE (1972), edició castellana, p. 103–109, i, en particular, p. 106–107.

163. Vegeu A.2.1*a* (pàgines 265–269).

A continuació, les definicions de «raó» (Dv 3 i Dv 4, que, de fet, és un postulat), «igualtat de raons» i, de retruc, el concepte de «proporció» (Dv 5 i Dv 6) i «desigualtat de raons» (Dv 7). Per a una exposició acurada d'aquestes definicions, vegeu la part d'aquesta història dedicada a Èudox.[164]

La definició Dv 8,[165] tal com està formulada, no és una definició sinó una condició. Seguint la metodologia de les definicions precedents i següents, la Dv 8 hauria d'introduir el nom de «proporció contínua» per a proporcions amb tres elements.

Les definicions Dv 9 i 10 fan referència a les proporcions contínues i introdueixen, subreptíciament, el concepte de «raó composta». De fet, diuen que, per a $n = 3$ i 4, la raó que hi ha entre les magnituds primera i darrera d'una cadena de n proporcions contínues és la $(n - 1)$-tupla de la raó que hi ha entre les magnituds primera i segona.[166]

La definició Dv 11 diu que, en tota proporció, els antecedents i els consegüents són homòlegs (ὁμόλογος) entre si.[167]

Les definicions Dv 12, 13, 14, 15, 16, 17 i 18 també són nominalistes, és a dir, donen nom a certes operacions amb els antecedents i consegüents de les raons o proporcions. Les recollim esquemàticament a la taula 1.8.

Les proposicions.[168] Les vint-i-cinc proposicions són totes d'índole algebraica i les exposarem de forma molt sintètica, en llen-

---

164. Pla (2016*c*), p. 103–109, i Pla (2010), p. 76–78 i 87–90.

165. «Una proporció necessita, almenys, tres magnituds.»

166. La limitació a $n = 3$ i 4 és totalment natural en l'àmbit de la geometria, ja que és difícil acceptar una n-pla que superi el 3. Formalment, si $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$, amb $n \geq 3$, són n magnituds que satisfan la proporció contínua $\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_2} = \cdots = \frac{\mathfrak{A}_{n-1}}{\mathfrak{A}_n}$, aleshores $\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_n} = \left(\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_2}\right)^{n-1}$.

167. Recordem que, inicialment, una proporció és la igualtat de dues raons, i en una raó les magnituds són de la mateixa classe, però, quan s'igualen dues raons, les dues magnituds de la segona raó poden ser d'una classe diferent a les de la primera. Ara bé, es poden alternar.

168. Vegeu A.2.1*b* (pàgines 270–300).

guatge lingüisticoalgebraic, a la taula 1.9,[169] en la qual cal tenir present que l'expressió $m\,\mathfrak{A}$, on m indica un nombre natural i $\mathfrak{A}$ una magnitud arbitrària, abreuja la juxtaposició de la magnitud $\mathfrak{A}$ amb si mateixa, m vegades: $m\,\mathfrak{A} = \mathfrak{A} \overset{m)}{\cdots} \mathfrak{A}$, que indicarem, per a fer-ho més comprensible, així: $m\,\mathfrak{A} := \mathfrak{A} + \overset{m)}{\cdots} + \mathfrak{A}$.[170]

Taula 1.8 *Taula esquemàtica de les definicions DV 12-18*

Definició	Operació	Nom grec i llatí	Original	Transformat
Dv 12	Alternar o Permutar	ἐναλλάξ *alternando* *permutando*	$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}}$	$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}} = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{D}}$
Dv 13	Invertir	ἀνάπαλιν *invertendo*	$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}}$	$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}} = \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{C}}$
Dv 14	Compondre una raó	συνθέντι *componendo*	$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$	$\frac{\mathfrak{A}+B}{\mathfrak{B}}$
Dv 15	Separar	διαίρεσις *separando*	$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$	$\frac{\mathfrak{A}-B}{\mathfrak{B}}$
Dv 16	Convertir	ἀναστροφή *convertendo*	$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$	$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}-B}$
Dv 17	Multiplicar	δι᾽ ἴσον *ex æquali*	$\frac{\mathfrak{A}_i}{\mathfrak{A}_{i+1}} = \frac{\mathfrak{M}_i}{\mathfrak{M}_{i+1}}$ $(i = 1, \dots, k-1)$	$\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_k} = \frac{\mathfrak{M}_1}{\mathfrak{M}_k}$
Dv 18	Pertorbar[171]	τεταραγμένῃ *distantia*	$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{P}}$, $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}} = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}$	$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}} = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{P}}$

Per a acabar, volem indicar tres qüestions de caire gnoseològic i epistemològic: 1) L'existència de la magnitud —sense una definició clara— s'ha d'imposar hipotèticament. És clar que ningú no dubta que les línies, les superfícies i els sòlids són magnituds però, com veurem a l'ítem 2, no podem admetre-ho completament. 2) Els nombres naturals són magnituds les raons de les quals menen als nombres fraccionaris o parts; però Euclides, al llibre VII, refà moltes de les definicions i propietats del llibre V, cosa que fa pensar que la part aritmètica és independent de la resta. D'alguna manera n'és una part externa, una mena

169. Vegeu Heath (1921), volum I, p. 368-391.

170. Acceptem, d'una manera natural, que una magnitud repetida proporciona una nova magnitud que, d'alguna manera, és el doble de la inicial: dues vegades la inicial. És a dir, acceptem l'«addició» d'una magnitud amb si mateixa i de magnituds d'una mateixa classe.

171. La validesa de Dv 17 i 18 s'estableix a Ev 22 i 23.

d'apèndix de la resta del llibre. Però, al llibre X, integra els nombres en les raons de les magnituds commensurables. 3) Les figures són absolutament «ideals». S'hi usen segments rectilinis per a designar magnituds, en principi arbitràries, o, en qualsevol cas, línies, superfícies i sòlids. Atesa l'ambigüitat del terme «magnitud», del qual solament Aristòtil dóna una descripció,[172] és impossible fer-ne una figura que sigui, ni tan sols, la pretesa ombra platònica corresponent.

TAULA 1.9 *Taula de les proposicions EV 1-25*

Proposició	Enunciat lingüisticoalgebraic
Ev 1	$m\,\mathfrak{A}_1 + \cdots + m\,\mathfrak{A}_k = m\,(\mathfrak{A}_1 + \cdots + \mathfrak{A}_k)$.
Ev 5	$m\,\mathfrak{A} - m\,\mathfrak{B} = m\,(\mathfrak{A} - \mathfrak{B})$.
Ev 2	$m_1\,\mathfrak{A} + \cdots + m_k\,\mathfrak{A} = (m_1 + \cdots + m_k)\,\mathfrak{A}$.
Ev 6	$m\,\mathfrak{A} - n\,\mathfrak{A} = (m - n)\,\mathfrak{A}$.
Ev 3	$m\,(n\,\mathfrak{A}) = (m \times n)\,\mathfrak{A}$.
Ev 4	Si $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}$, aleshores $\frac{m\,\mathfrak{A}}{n\,\mathfrak{B}} = \frac{m\,\mathfrak{M}}{n\,\mathfrak{N}}$.
Ev 7 Ev 9	Si $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$, aleshores $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}} = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}}$ i $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}} = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}}$, i recíprocament.
Ev 8 Ev 10	Si $\mathfrak{A} > \mathfrak{B}$, aleshores $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}} > \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}}$ i $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}} > \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}}$, i recíprocament.
Ev 11	[Transitivitat =] $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}}$ i $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}} = \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{F}}$ impliquen $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{F}}$.
Ev 12	Si $\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{B}_1} = \cdots = \frac{\mathfrak{A}_k}{\mathfrak{B}_k}$, aleshores $\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{B}_1} = \frac{\mathfrak{A}_1+\cdots+\mathfrak{A}_k}{\mathfrak{B}_1+\cdots+\mathfrak{B}_k}$.
Ev 13	[Transitivitat =, >] $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}}$ i $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}} > \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{F}}$ impliquen $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} > \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{F}}$.
Ev 14	Si $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}}$, aleshores $\mathfrak{A} \lesseqqgtr \mathfrak{C}$ implica $\mathfrak{B} \lesseqqgtr \mathfrak{D}$.
Ev 15	[Equimultiplicitat] $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \frac{m\,\mathfrak{A}}{m\,\mathfrak{B}}$.
Ev 16	[*Alternando*] Si $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}$, aleshores $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{M}} = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{N}}$.
Ev 17	[*Separando*] Si $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}}$, aleshores $\frac{\mathfrak{A}-\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{C}-\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}}$.
Ev 18	[*Componendo*] Si $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}}$, aleshores $\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{C}+\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}}$.
Ev 19	Si $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{A}-\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}-\mathfrak{D}}$, aleshores $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}} = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$.
Ev 20	Si $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}$ i $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}} = \frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{P}}$, aleshores $\mathfrak{A} \lesseqqgtr \mathfrak{C}$ implica $\mathfrak{M} \lesseqqgtr \mathfrak{P}$.
Ev 21	Si $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{P}}$ i $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}} = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}$, aleshores $\mathfrak{A} \lesseqqgtr \mathfrak{C}$ implica $\mathfrak{M} \lesseqqgtr \mathfrak{P}$.
Ev 22	Si $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}$ i $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}} = \frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{P}}$, aleshores $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}} = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{P}}$.
Ev 23	Si $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{P}}$ i $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}} = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}$, aleshores $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}} = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{P}}$.

172. Vegeu la nota 160 (pàgina 48).

TAULA 1.9 *Taula de les proposicions* Ev *1-25* (continuació)

Proposició	Enunciat lingüisticoalgebraic
Ev 24	Si $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}} = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{P}}$ i $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}} = \frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{P}}$, aleshores $\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}} = \frac{\mathfrak{M}+\mathfrak{N}}{\mathfrak{P}}$.
Ev 25	Si $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}}$ i $\mathfrak{A}$ és la més gran de les quatre magnituds $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ i $\mathfrak{D}$, aleshores $\mathfrak{A}+\mathfrak{D} > \mathfrak{B}+\mathfrak{C}$.

Quan aquestes eines s'apliquen als objectes de la geometria plana, proporcionen els resultats de caràcter «afí» —semblança de figures rectilínies—, d'una gran importància. I forneixen el cos d'un dels llibres més notables dels *Elements*, el VI.

TAULA 1.10 *Dependències dels «elements» del llibre* V

Ev	D	P	Nc[118]	E
1	V 2	—	2	—
2	—	—	—	—
3	—	—	—	V 2
4	V 5	—	—	V 3
5	—	—	3	V 1
6	—	—	1, 3	V 2
7	V 5	—	2	—
8	V 4, 7	—	1	I 3, V 1
9	—	—	—	V 8
10	—	—	—	V 7, 8
11	V 5	—	—	—
12	V 5	—	2	V 1
13	V 5, 7	—	—	—
14	—	—	—	V 7, 8, 9, 10, 11, 13
15	—	—	—	V 7, 12
16	V 5	—	—	V 11, 14, 15
17	V 5	—	2, 4′	V 1, 2
18	—	—	—	V 11, 14, 17
19	—	—	—	V 11, 16, 17
20	V 17	—	—	V 7 porisma, 8, 9, 10, 11, 13
21	V 17	—	—	V 7, 7 porisma, 8, 9, 10, 11, 13
22	V 5, 17	—	—	V 4, 20
23	V 5	—	—	V 11, 15, 16, 21
24	—	—	—	V 7 porisma, 18, 22
25	—	—	2, 4′	V 19

Llibre vi. *Aplicacions de la teoria de la proporció a la geometria plana*

Inicialment, aquest llibre és pitagòric i es va desenvolupar en el si de les escoles sofística i platònica atenenques. Però, finalment, acaba sent platònic per la influència i presència d'Èudox. L'objectiu de la temàtica que tracta és l'aplicació de la teoria de la proporció a la geometria plana. Hi trobem, per exemple, la tècnica de l'aplicació d'àrees desenvolupada completament.

Les definicions.[173] El llibre vi conté quatre definicions, la primera de les quals és la de les «figures semblants» —angles iguals i costats proporcionals. També introdueix les «figures inversament proporcionals», en què els costats que s'oposen a angles iguals són inversament proporcionals. Parla de la mitjana i extrema raó, ja que el segment és a la part gran com la part gran és a la petita, cosa que, curiosament, Euclides ja havia construït a Eii 11. I, finalment, introdueix l'altura (ὕψος) d'una figura, el segment perpendicular que va del vèrtex a la base.[174]

Les proposicions.[175] Les proposicions primera i darrera —Evi 1 i 33— són anàlogues, com també ho són les demostracions,[176] però es refereixen a objectes diferents: triangles i paral·lelograms de la mateixa altura, en el primer cas; i angles centrals i inscrits en cercles de radis iguals, en el segon. En el primer cas, les àrees són com les bases; en el segon, els angles som com els arcs —o les cordes.

A continuació es troben dos teoremes realment notables:

173. Vegeu A.2.2*a* (pàgines 301–302).

174. Aquesta definició és relativa a cada costat o base, és a dir, val per a tots els vèrtexs i tots els costats oposats. En concret, l'altura proporciona la separació que hi ha entre la base i el segment paral·lel a la base. Vegeu Dvi 4 i la nota 888 (pàgina 302).

175. Vegeu A.2.2*b* (pàgines 302–352).

176. Vegeu com aplica Euclides la teoria de la proporció a la geometria a Pla (2010), p. 314–319.

EVI 2. Teorema de Tales. Quan tallem dos costats d'un triangle amb un segment paral·lel a l'altre costat, queden dividits proporcionalment i recíprocament.

EVI 3. La bisectriu d'un angle d'un triangle divideix el costat oposat en dos segments proporcionals als costats adjacents.

▶ **Exercici 39**. Demostreu EVI 3 acceptant la validesa del teorema de Tales. ◀

Les proposicions EVI 4, 5, 6 i 7 estableixen els quatre criteris de semblança de triangles (AAA, CCC, CAC i ACC).[177]

▶ **Exercici 40**. Accepteu la validesa del teorema de Tales per a provar els criteris de semblança de triangles. ◀

La proposició EVI 8 proporciona el «teorema de l'altura» dels triangles rectangles. L'altura sobre la hipotenusa d'un triangle rectangle el divideix en dos triangles semblants entre si i semblants al triangle inicial.

▶ **Exercici 41**. Proveu EVI 8. I, com a porisma, deduïu-ne el teorema de Pitàgores. [*Indicació.* Euclides omet aquest porisma.] ◀

Els problemes EVI 9 i 10 estableixen què cal fer per a dividir un segment en k parts iguals i en k parts proporcionals a k segments donats.

▶ **Exercici 42**. Proveu EVI 9 i 10. ◀

Les proposicions EVI 11 i 12 resolen els problemes que consisteixen a determinar la «tercera»[178] i la «quarta» proporcionals.

▶ **Exercici 43**. Proveu EVI 11 i 12. ◀

La proposició EVI 13 exposa la manera de determinar la «mitjana» proporcional entre dos segments.[179]

---

177. Angles iguals; costats proporcionals; angle igual i costats que el formen proporcionals; i angle igual i costats que no el formen proporcionals.

178. Els termes mitjans són iguals.

179. El teorema EVI 13 permet quadrar un rectangle, cosa que Euclides ja havia establert a EII 14. De fet, si els considerem des del punt de

▶ **Exercici 44**. Proveu EVI 13. ◀

EVI 14 i 15. Si paral·lelograms i triangles equivalents són semblants, els costats que formen els angles iguals són inversament proporcionals, i recíprocament.

▶ **Exercici 45**. Proveu EVI 14 i 15. ◀

Les proposicions EVI 16 i 17 estableixen: si AB, CD, EF i GH són quatre segments proporcionals, el rectangle que formen els termes extrems és igual [en àrea, és a dir, equivalent] al que formen els termes mitjans,[180] tant si són diferents com si són iguals. En aquest segon cas, el rectangle és un quadrat, i recíprocament.

▶ **Exercici 46**. Sabríeu demostrar-ho? ◀

El problema EVI 18 resol la qüestió: donat un segment, és possible construir-hi un polígon semblant a un de donat.

▶ **Exercici 47**. Feu-ho. ◀

El teorema de Tales per a superfícies s'exposa a EVI 19, 20 i 23. Les àrees de figures semblants —i de paral·lelograms equiangles— són com la raó doble dels costats homòlegs.[181]

EVI 21. La semblança de figures és una propietat transitiva.

EVI 24. Els paral·lelograms travessats per una diagonal del paral·lelogram són semblants entre si i amb el total.

EVI 25. És possible construir una figura semblant a una figura donada i que tingui una àrea donada.

Les proposicions següents —EVI 27, 28, 29, 30 i 31— fan referència a l'«aplicació d'àrees» i a la «resolució geomètrica de les equacions de segon grau». En concret, EVI 27 diu:

---

vista algèbric, aquests teoremes porten a l'extracció de l'arrel quadrada, a diferència dels dos anteriors, EVI 11 i 12, que porten al producte i al quocient. Vegeu DESCARTES (1637), edició catalana, p. 14–15.

180. Ras i curt, $\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{GH}$ si, i només si, $AB \times GH = CD \times EF$.

181. Com a porisma d'EVI 19 resulta que, en el cas de tres segments proporcionals, la raó del primer i el tercer és la raó de les àrees de figures poligonals semblants construïdes damunt el primer i el tercer.

> Dels paral·lelograms aplicats a un segment AB, deficients de paral·lelograms semblants al construït damunt la meitat del segment i col·locats de forma anàloga, el més gran és el que s'aplica a la meitat del segment i és semblant al seu defecte.

Quan s'arriba a aquest punt, cal precisar el significat del terme «deficient». Entendrem que els paral·lelograms $\varparallelogram AD$ i $\varparallelogram AF$ són *deficients* d'un paral·lelogram $\varparallelogram AO$ i $\varparallelogram AE$, respectivament, quan estan construïts damunt una part de la base amb els mateixos angles i amb les bases als mateixos segments paral·lels. Cadascun dels paral·lelograms $\varparallelogram EO$ i $\varparallelogram KE$, que complementa el deficient, és el *defecte*. De forma semblant, es defineixen el paral·lelogram *excedent* i l'*excedència* corresponent.[182]

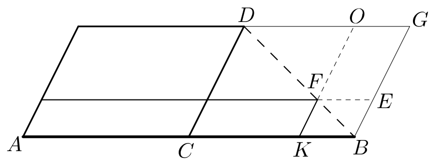


FIGURA 1.4 Aplicació deficient.

Donats el segment AB i el paral·lelogram $\varparallelogram AD$ col·locat damunt el segment AC, considerem un paral·lelogram per defecte $\varparallelogram AF$ construït damunt el segment AK —una part de AB—, de manera que el defecte de $\varparallelogram AF$, que és el $\varparallelogram FB$, sigui un paral·lelogram semblant a $\varparallelogram AD$. Aleshores, afirmem que, d'entre tots els paral·lelograms $\varparallelogram AF$, el paral·lelogram $\varparallelogram AD$ és el que té l'àrea més gran.

A l'hora de resoldre les equacions de segon grau que s'obtenen per aplicació d'àrea per defecte, aquest resultat proporciona un diorisma.

▶ **Exercici 48**. Establiu la validesa de l'afirmació anterior. ◀

El significat algèbric d'aquesta proposició és important. Suposem, per a simplificar, que els paral·lelograms són rectangles, i donem nom als segments: $AC := b, DC := c$ i $FK := x$. Clarament, $KB := \frac{b}{c}\,x$. Si $AB := a = 2\,b$, aleshores $AK := a - \frac{b}{c}\,x$ i l'àrea del $\square\, AF$ és $\mathcal{A} := \left(a - \frac{b}{c}\,x\right)x$, màxima quan (el rectan-

182. Vegeu VERA (1970), volum I, p. 623, nota 15.

gle) $\square AF$ és el (rectangle) $\square AD$. És a dir, necessàriament, $\mathcal{A} \leq \frac{a^2 c}{4 b}$. En definitiva, l'equació de segon grau té sempre una solució amb el benentès que el «discriminant» és $a^2 - 4\,\mathcal{A} \geq 0$.

▶ **Exercici 49**. Deduïu que, d'entre tots els rectangles de perímetre donat, el quadrat és el que té l'àrea màxima. ◀

Amb les proposicions Evi 26 i 27 Euclides disposa de les eines per a establir Evi 28 i 29, que li permeten resoldre geomètricament —amb regle i compàs— les equacions de la forma

$$a\,x \mp \frac{b}{c}\,x^2 = \mathcal{A}.$$

La primera equació està sotmesa al diorisma anterior, és a dir, té restriccions.

Finalment, la proposició Evi 31 estableix el teorema de Pitàgores generalitzat: l'àrea de la figura [poligonal] construïda damunt la hipotenusa és igual a la suma de les àrees de les figures construïdes damunt els catets, amb el benentès que siguin figures semblants. Procle l'atribueix a Euclides, però Heath discrepa d'aquesta opinió, ja que Hipòcrates de Quios l'havia aplicat a semicercles per a demostrar que certes lúnules són quadrables.[183]

El llibre es tanca amb Evi 33, que estableix, com ja hem indicat abans, la semblança dels angles centrals i inscrits amb els arcs de cercles del mateix radi.

Taula 1.11 *Dependències dels «elements» del llibre* vi

Evi	D	P	Nc[118]	E
1	v 5	2	—	i 2, 3, 38, 41, v 11, 15,
2	—	1	—	i 31, 38, 39, v 7, 9, 11, vi 1
3	—	1, 2, 5	1	i 5, 6, 9, 29, 31, v 7, 9, 11, vi 2

183. Pla (2016*c*), p. 244–249. Vegeu el problema 53 (pàgina 67).

TAULA 1.11 *Dependències dels «elements» del llibre* VI
(continuació)

EVI	D	P	Nc[118]	E
4	—	2, 5	—	I 17, 28, 34, V 7, 11, 16, 22, VI 2
5	—	—	1	I 4, 8, 23, 32, V 9, 11, VI 4
6	—	—	1	I 4, 23, 32, V 9, 11, VI 4
7	—	—	—	I 5, 13, 17, 23, 32, V 9, 11, VI 4
8	VI 1	4	—	I 12, 32, VI 4
9	—	1	—	I 2, 3, 31, VI 2
10	—	1	1	I 31, 34, V 7, 11, VI 2
11	—	1, 2	1	I 2, 3, 31, V 7, 11, VI 2
12	—	1	1	I 2, 3, 31, V 7, 11, VI 2
13	I 10	1, 3	—	I 2, 11, III 31, VI 8 porisma
14	—	2, 5	—	I 13, 14, 31, V 7, 9, 11, VI 1
15	—	1	1	I 13, 14, V 7, 11, VI 1
16	II 1	—	1	I 2, 3, 11, 31, V 7, 11, VI 14
17	—	—	1	I 2, 3, V 7, 11, VI 16

TAULA 1.11 *Dependències dels «elements» del llibre* VI
(continuació)

EVI	D	P	Nc[118]	E
18	VI 1	1	2	I 23, 32, V 11, 16, VI 4
19	V 9	1	—	V 7, 11, 16, VI 1, 11, 15
20	VI 1	1	3	I 32, V 11, 12, 16, 22, VI 1, 4, 6, 19
21	VI 1	—	1	V 11
22	—	—	—	V 7, 9, 11, VI 11, 12, 18, 19 i 20 porismes, 21
23	—	—	—	I 13, 14, 31, V 11, 22, VI 1, 12
24	VI 1	—	—	I 29, 32, V 11, 16, 18, 22, VI 2, 4, 21
25	—	—	1	I 14, 44, 45, V 11, 16, VI 1, 13, 18, 19 i 20 porismes
26	VI 1	—	—	I 30, 31, V 9, 11, VI 24
27		—	1, 2	I 10, 36, 43, VI 26
28		—	2, 3	I 1, 2, 3, 10, 31, 36, 43, VI 18, 21, 24, 25, 26, 27
29		2	1, 2, 3	I 1, 3, 10, 31, 36, 43, VI 18, 21, 24, 25, 26
30	—	—	3	I 46, V 7, 11, VI 14, 29
31	VI 1	—	—	I 12, V 24, VI 8, 19, 20 porisma
32	—	—	1, 2	I 14, 29, 32, VI 6
33	V 5	1	—	III 20, 27, V 15

1.4 Problemes

Problema 1. És necessari l'ús de P 2′ a la demostració d'Ei 1?

A la demostració d'Ei 4, s'usa implícitament P 1′? [*Indicació.* Vegeu Ei 4 (pàgina 91).]

Problema 2. Donats un segment i un punt (del segment, o exterior al segment), el segment perpendicular al segment donat pel punt donat és únic?

Problema 3. Amb el postulat P 5, és possible demostrar que si un segment en talla un altre, una prolongació talla necessàriament qualsevol segment paral·lel a aquest segment o a la seva prolongació.

Aquest enunciat és equivalent al de P 5?

Problema 4. Amb el postulat P 5, és possible demostrar que si un segment passa per un vèrtex d'un angle d'un triangle, talla necessàriament el costat oposat. [*Indicació.* Useu Ei 17.][184]

Problema 5. Consulteu la definició Di 22 (pàgina 80) i observeu que inclou totes les classes de quadrilàters possibles i que són excloents. Analitzeu la diferència amb la definició Di 21.

Problema 6. Si acceptem com a definició de triangle isòsceles Di 20′ en lloc de Di 20, podem demostrar la proposició Ei 6′, anàloga a Ei 6′? Vegeu la nota 306 (pàgina 96).

Problema 7. Proveu que el punt D de la figura Ei 7 (pàgina 98) no es troba:

a) en el costat CB,

b) a l'interior del triangle $\triangle ABC$.

El cas *a* és senzill.

Vegem el cas *b*.

b_1) Suposem que el punt D i, de retruc, els segments AD i DB són dins el triangle $\triangle ABC$.

[hipòtesi de l'absurd]

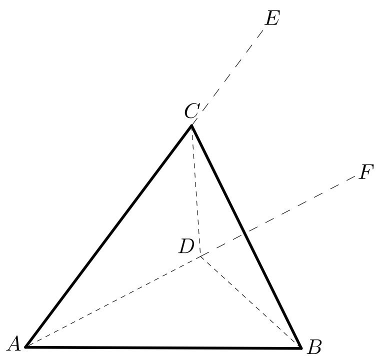


FIGURA 1.5 El punt D d'Ei 7 no pot ser interior al triangle $\triangle ABC$.

184. Compareu aquest resultat amb l'observació de la nota 108 (pàgina 28).

b_2) Sabem que els costats AB i BC (del triangle $\triangle ABC$) són iguals als costats AD i BD (del triangle $\triangle ABD$), respectivament.

[hipòtesi]

b_3) Unim CD i prolonguem (els costats) AC i AD fins a E i F, respectivament. [P 1 i 2]

b_4) Atès que el triangle $\triangle CAD$ és isòsceles, els angles externs $\widehat{ECD}$ i $\widehat{FDC}$ són iguals. [EI 5]

b_5) Però l'angle $\widehat{ECD}$ és més gran que l'angle $\widehat{BCD}$ perquè el conté.

b_6) En resulta que l'angle $\widehat{FDC}$ és més gran que l'angle $\widehat{BCD}$

[principi de substitució]

i, de retruc, l'angle $\widehat{BDC}$ és més gran que l'angle $\widehat{BCD}$, atès que (l'angle) $\widehat{BDC}$ conté (l'angle) $\widehat{FDC}$ (que és més gran que l'angle $\widehat{BCD}$). [llei de transitivitat de la desigualtat]

b_7) Però (els costats) DB i CB són iguals; [hipòtesi]
per tant, els angles a la base del triangle $\triangle CBD$ són iguals, és a dir, (l'angle) $\widehat{BDC}$ és igual (a l'angle) $\widehat{BCD}$. [EI 5]

b_8) En definitiva, l'angle $\widehat{BDC}$ és més gran que l'angle $\widehat{BCD}$ i alhora són iguals. Impossible. ♠

Problema 8. Sabríeu demostrar que per un punt donat exterior a un segment donat, només podem tirar-hi un segment paral·lel? [*Indicació.* Feu-ho per l'absurd, useu EI 17, i observeu que contradiu P 5. Per tant, necessitem P 5.]

Problema 9. Afirmem que per un punt exterior a un segment hi podem tirar un paral·lel i només un equival a P 5.

Problema 10. Imposar que la suma dels tres angles d'un triangle val dos angles rectes implica el postulat dels paral·lels, és a dir, que són la mateixa cosa. [*Indicació.* Vegeu BURTON (1989), capítol 11, p. 538.]

Problema 11. *a*) Si dues parelles de segments es tallen de manera que els costats oposats del quadrilàter són iguals, cada parella de segments és una parella de segments paral·lels. [*Indicació.* No cal P 5.] *b*) Si dues parelles de segments es tallen de manera que els angles oposats del quadrilàter són iguals, cada parella de segments és una parella de segments paral·lels. [*Indicació.* Cal P 5? Fixem-nos que el comportament dels costats i dels angles no és anàleg. Això justifica la taxonomia de la definició Di 22.]

Problema 12. Un romboide, Di 22, és un paral·lelogram? Per a provar-ho, cal P 5?

Problema 13. Sabríeu donar un contraexemple que invalidi Ei 14, si falla la condició «a costats diferents», com, segons Procle, féu Porfiri? [*Indicació.* Vegeu Heath (1925), volum i, p. 277.]

Problema 14. Quant val la suma dels angles interns d'un polígon convex? I quant, la dels angles externs en una mateixa direcció? Què varia si el polígon és còncau?

Problema 15. Vegeu el problema que es suggereix a la nota 470 (pàgina 138). Proveu que hi ha proposicions anàlogues per a paral·lelograms.

Problema 16. Sigui $\triangle ABC$ un triangle rectangle amb l'angle recte al vèrtex A. Feu els quadrats $\square ABFG$, $\square ACKH$ i $\square BCED$ damunt els catets i damunt la hipotenusa, respectivament. Tireu l'altura AI del vèrtex A a la base BC i prolongueu-la fins que talli el costat DE del quadrat $\square BCED$ al punt L.

El quadrat $\square BCED$ queda dividit en dos rectangles $\square BILD$ i $\square CILE$.

Volem establir que el primer rectangle equival al quadrat $\square ABFG$ i el segon al quadrat $\square ACKH$.

Tireu els segments FC i AD i proveu que:

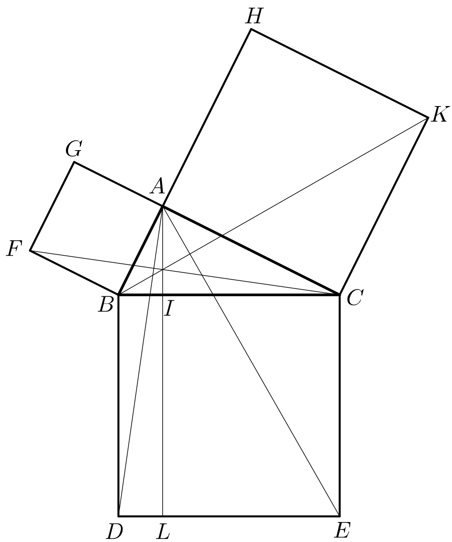


Figura 1.6 El teorema de Pitàgores amb tangram.

a) Els triangles $\triangle BCF$ i $\triangle ABD$ són iguals.

b) Valen la meitat del quadrat $\square ABFG$.

c) I també valen la meitat del rectangle $\square BILD$.

Ara tireu els segments AE i BK i refeu els tres passos anteriors amb els triangles obtinguts amb el vèrtex al punt C, $\triangle BCK$ i $\triangle ECA$, amb el quadrat $\square ACKH$ i amb el rectangle $\square ICEL$.

Problema 17. Si dos segments que ixen d'un punt incideixen en un segment, el més llarg està més allunyat del peu de la perpendicular del punt al segment que el més curt. [*Indicació.* Useu EI 47.]

Problema 18. Proveu que si dos triangles rectangles tenen hipotenuses iguals i un dels catets d'un és més curt que un catet de l'altre, l'altre catet del primer (triangle rectangle) és més llarg que l'altre catet del segon.

Deduïu-ne que l'angle $\widehat{BEH}$ (de la figura EIII 15 (pàgina 207)) —que és igual a l'angle $\widehat{MEL}$— és més gran que l'angle $\widehat{FEK}$.

Problema 19. Comproveu la validesa de cada una de les relacions del llibre II. Vegeu la nota 516 (pàgina 154).

En cada un dels casos possibles, doneu α i β en funció de a, b.

Problema 20. Useu EII 1, 2 i 3 per a provar que la diferència de dos quadrats equival al rectangle que té com a costats la suma i la diferència dels costats dels quadrats. (HEATH (1925), volum I, p. 378–379.)

Problema 21. Proveu EII 4 usant EII 2 i 3, com féu Clavius. [*Indicació.* Vegeu HEATH (1925), volum I, p. 381.]

Problema 22. Quina expressió algèbrica correspon a EII 5? Equival a l'expressió de la diferència de quadrats? Cal recórrer a la propietat del gnòmon?

Problema 23. Sabríeu usar EII 5 per a determinar un punt D d'un segment AB donat, de manera que el rectangle de costats AD i DB sigui equivalent a la superfície d'un quadrat de costat PQ donat. Cal alguna mena de diorisma?

Si atribuïu els valors a, x i b a AB, DB i PQ, respectivament, quina equació de segon grau heu resolt?

Problema 24. Quina expressió algèbrica correspon a EII 6? Equival a l'expressió de la diferència de quadrats? Cal recórrer a la propietat del gnòmon? Hi ha limitacions en aquest cas? [*Indicació.* Vegeu com ho usa Hipòcrates de Quios segons HEATH (1925), volum I, p. 386–387.]

Problema 25. Fixeu-vos que EII 7 proporciona geomètricament l'expressió algèbrica $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b$.

Problema 26. Demostreu les dues afirmacions de la nota d'EII 8 (nota 566, pàgina 167).

Problema 27. Feu una demostració tangram anàloga a la d'EII 8 per a EII 9.[185]

Què passa amb EII 10?

Problema 28. Refeu la demostració d'EII 6 per tal d'obtenir la demostració, com a cas particular, d'EII 11.

Problema 29. Quines són les proposicions recíproques d'EII 12 i EII 13. Són possibles totes dues? Són igualment fàcils d'establir?

Problema 30. Doneu les demostracions de les proposicions EII 12 i EII 13 que s'inspiren en la demostració de la proposició EI 47. [*Indicació.* Són una mica delicades.]

Problema 31. Fixeu-vos que si completem la figura de la proposició EII 14 amb el quadrat de EH, obtenim la figura d'EI 43 i només cal recórrer a la propietat del gnòmon.

Problema 32. Fixeu-vos que EII 14 permet determinar un lloc geomètric —el de la paràbola. Fixeu ED i feu que EB sigui mòbil, és a dir, que prengui valors diversos. Aleshores el valor de EH també varia. Si porteu aquest valor damunt el punt B que correspon a cada cas i els uniu, tindreu una paràbola.

Problema 33. Vegem aquestes qüestions relatives al cercle.
a) El centre d'un cercle és únic. [*Indicació.* Vegeu EIII 1 (pàgina 186).]
b) El cercle és convex. [*Indicació.* Vegeu EIII 2 (pàgina 188).]
c) Les afirmacions fetes a la demostració d'EIII 2. [*Indicació.* Vegeu la nota 630 (pàgina 189).]

Problema 34. Doneu una demostració directa de la proposició EIII 2. [*Indicació.* Vegeu HEATH (1925), volum II, p. 9–10. Només cal provar que si E és un punt del segment AB, DE és més curt que un radi (EI 24).]

Problema 35. A la demostració de la proposició EIII 7 (pàgina 193) s'afirma que «l'angle $\widehat{BEF}$ és més gran que l'angle $\widehat{CEF}$».

185. Vegeu HEATH (1925), volum I, p. 394, i la nota 572 (pàgina 170).

Vegem-ne una demostració:
a_1) Completeu la figura EIII 7 amb el punt M en què es tallen els segments FB i EC. [*Indicació.* Useu el problema 4 (pàgina 60).]
a_2) Tireu la perpendicular N del punt E al segment FB i proveu que EM és més curt que EB. [*Indicació.* Useu el problema 17 (pàgina 63).]
a_3) Useu el triangle $\triangle FEB$ i el segment interior EM per a establir que l'angle $\widehat{BEF}$ és més gran que l'angle $\widehat{CEF}$. [*Indicació.* L'angle $\widehat{BEF}$ és la suma dels angles $\widehat{MEF}$ i $\widehat{MEB}$.]

Problema 36. Sabríeu constatar que la demostració d'EIII 34 és vàlida amb independència de la naturalesa de l'angle (pàgina 231)?

Problema 37. Sabríeu dir si la construcció de la quarta proporcional de tres segments donats equival al teorema de Tales?

Problema 38. Sabríeu demostrar les proposicions EIII 35, 36 i 37, usant la teoria de la proporció? Feu-ho.

Problema 39. Tres tangents [diferents] a una circumferència es tallen sempre dues a dues? [*Indicació.* Vegeu EIV 3 (pàgina 242).]

Problema 40. Proveu que les tres bisectrius d'un triangle es tallen en un punt: l'«incentre». [*Indicació.* Vegeu EIV 4 (pàgina 244).]

Problema 41. Proveu que:
a) Les tres altures d'un triangle es tallen en un punt: l'«ortocentre».
b) Les tres «mitjanes» d'un triangle —els segments que uneixen els vèrtexs amb els punts mitjans dels costats oposats— es tallen en un punt: el «baricentre» o «centre de gravetat».
c) Les tres «mediatrius» d'un triangle —els segments perpendiculars als costats del triangle pel punt mitjà— es tallen en un punt: el «circumcentre». [*Indicació.* Entenem que aquests segments es tallen convenientment prolongats.]

Quina és la condició necessària i suficient perquè aquests tres punts coincideixin? Coincideixen també amb l'incentre?[186]

Problema 42. En quines condicions és possible que *a*) un triangle, *b*) un quadrilàter [*Indicació.* Vegeu EIII 31.] i *c*) un polígon, en gene-

186. A l'obra d'Euclides, hi trobem implícitament l'incentre i el circumcentre.

ral, siguin inscriptibles en un cercle?

Si un polígon és inscriptible en un cercle, podem garantir que $S = p\,r$, on S, p i r designen l'àrea, el semiperímetre i el radi, respectivament? [*Indicació.* Vegeu EIV 4 (pàgina 244).]

Problema 43. Doneu la longitud del costat de cadascun dels polígons regulars, construïbles amb regle i compàs —triangle equilàter, quadrat, pentàgon, hexàgon, octògon, decàgon, dodecàgon i pentadecàgon—, en funció *a*) del radi R del cercle circumscrit i *b*) del radi r del cercle inscrit. [*Indicació.* Useu *i*) l'àlgebra i *ii*) la trigonometria.]

Problema 44. Per a cadascun dels polígons regulars del problema anterior, doneu una fórmula que en proporcioni l'àrea, en funció dels radis r i R.

Problema 45. Refeu, pas a pas, amb llenguatge algèbric o simbòlic, l'enunciat i la demostració de les proposicions *a*) EV 4, *b*) EV 6 i *c*) EV 8.

Problema 46. Si $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ i $\mathfrak{D}$ són magnituds proporcionals i $\mathfrak{A}$ és la més llarga i $\mathfrak{D}$ la més curta, aleshores $\mathfrak{A} + \mathfrak{D} > \mathfrak{B} + \mathfrak{C}$. Podem deduir-ne que necessàriament $\mathfrak{A} > \mathfrak{B} > \mathfrak{C} > \mathfrak{D}$? [*Indicació.* Vegeu EV 25 (pàgina 299).]

Problema 47. Establiu els porismes de les proposicions següents:
a) EV 2. Si un nombre de magnituds $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_k$ són múltiples de $\mathfrak{C}$ i $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_k$ els mateixos múltiples de $\mathfrak{D}$, respectivament, aleshores les sumes dels primers i els segons, $\mathfrak{S}_{\mathfrak{A}}$ i $\mathfrak{S}_{\mathfrak{B}}$, són el mateix múltiple de $\mathfrak{C}$ i $\mathfrak{D}$, respectivament.
b) EV 4. Si $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}}$, on $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ i $\mathfrak{D}$ són quatre magnituds arbitràries. Aleshores, $\frac{m\,\mathfrak{A}}{m\,\mathfrak{C}} = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{D}}$ i $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}} = \frac{n\,\mathfrak{B}}{n\,\mathfrak{D}}$.
c) EV 7. Si dues raons són iguals, també ho són les raons invertides. És a dir, si $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}}$, aleshores $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}} = \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{C}}$.
d) EV 13. Si $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} > \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}}$ i $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}} = \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{F}}$, aleshores $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} > \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{F}}$.
e) EV 19. Siguin quatre magnituds $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}$, on $\mathfrak{A}_1$ i $\mathfrak{B}_1$ són parts de $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$, respectivament, i $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{B}_1}$, aleshores $\frac{\mathfrak{A}-\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{B}-\mathfrak{B}_1} = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{B}_1}$.
f) EV 24. Considerem sis magnituds $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3, \mathfrak{A}_4, \mathfrak{A}_5$ i $\mathfrak{A}_6$. Suposem que $\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_2} = \frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_4}$ i $\frac{\mathfrak{A}_5}{\mathfrak{A}_2} = \frac{\mathfrak{A}_6}{\mathfrak{A}_4}$. Aleshores, $\frac{\mathfrak{A}_1-\mathfrak{A}_5}{\mathfrak{A}_2} = \frac{\mathfrak{A}_3-\mathfrak{A}_6}{\mathfrak{A}_4}$ amb el benentès que $\mathfrak{A}_5$ i $\mathfrak{A}_6$ són parts de $\mathfrak{A}_1$ i $\mathfrak{A}_3$, respectivament.

Problema 48. El teorema de la bisectriu val tant per a angles aguts com rectes i obtusos? [*Indicació.* Vegeu Evi 3 (pàgina 305).]

Problema 49. Proveu l'afirmació de la nota 896 (pàgina 306).

Problema 50. Vegeu la nota corresponent a Evi 14 i demostreu la validesa de l'afirmació: «Les prolongacions dels costats EC i FA de paral·lelograms equiangles oposats pel vèrtex B (figura Evi 14, pàgina 319) es tallen.»

Problema 51. És curiós que Euclides no demostri Evi 15 com un porisma immediat d'Evi 14, usant Ei 41. Feu aquesta demostració.

Problema 52

a) És possible triangular una figura poligonal rectilínia còncava?

b) Proveu Evi 18 (pàgina 324) quan la figura poligonal és còncava.

c) Constateu que la demostració de la proposició Evi 19 (pàgina 326) és vàlida quan el punt G no cau dins el segment BC.

d) Proveu Evi 20 (pàgina 327) quan la figura poligonal és còncava.

e) Simplifiqueu la demostració d'Evi 20 usant els segments BE, BD (figura Evi 20, pàgina 328) per a connectar els triangles $\triangle BAE$, $\triangle DBE$ i $\triangle DBE$, $\triangle BCD$, i els segments GL, GK per a connectar els triangles $\triangle GFL$, $\triangle KGL$ i $\triangle KGL, \triangle KHG$.

f) Demostreu:

- f_1) Dos quadrats són equivalents si, i només si, els costats són iguals.
- f_2) Dos rectangles semblants són equivalents si, i només si, els costats són iguals. [*Indicació.* Vegeu Dvi 1.]
- f_3) Si tenim dos paral·lelograms —o dos triangles— situats entre dos segments paral·lels, és més gran el que té la base més gran.
- f_4) Si tenim dos paral·lelograms semblants,
  - *i*) són iguals si, i només si, tenen els costats iguals;
  - *ii*) és més gran el que té ambdós costats més grans, i recíprocament.

Problema 53. Compareu les demostracions d'Evi 30 (A.2.2*b*, pàgina 346) i la d'Hipòcrates de Quios de la lúnula de mitja circumferència.[187] És possible usar la mateixa demostració en ambdós casos?

187. Vegeu Pla (2016*c*), p. 246 i 491.

Problema 54. Considereu les figures adjuntes. Totes quatre satisfan les condicions de l'enunciat d'Evi 32, però cap en compleix la conclusió.

Quins passos de la demostració d'Evi 32 (pàgina 349) fallen en aquests quatre casos?

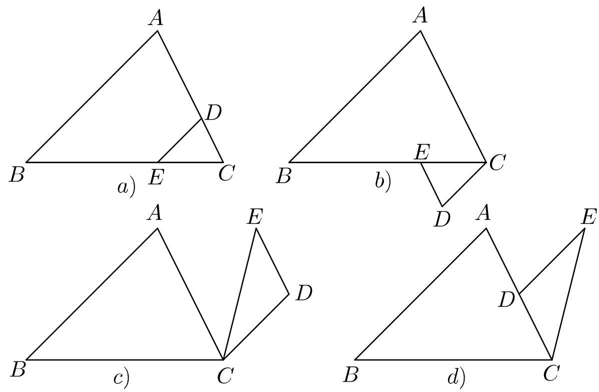


Figura 1.7 Quatre figures que contradiuen Evi 32.

Sabríeu modificar l'enunciat de l'esmentada proposició de manera que aquests quatre casos en quedessin exclosos? Feu-ho. [*Indicació.* Vegeu la nota 952 (pàgina 349).]

1.5 Algorismes

Programa 1. Feu un programa que, entrant-hi els valors reals de a, b i c, resolgui, al cos $\mathbb{R}$ dels nombres reals, l'equació $a\,x^2 + b\,x + c = 0$, quan sigui possible; i digui «irresoluble», quan no ho sigui.

Programa 2. Feu un programa que, entrant-hi els valors reals de a i $\mathcal{S}$, on a és la longitud del segment i $\mathcal{S}$ l'àrea d'un rectangle donat, faci l'aplicació d'àrees d'un rectangle d'àrea $\mathcal{S}$ al segment de longitud a, *a*) en paràbola, justa o exacta,[188] *b*) en hipèrbola i *c*) en el·lipse, de manera que el que excedeixi i el que manqui sigui semblant al rectangle donat.

188. Vegeu el darrer paràgraf de la pàgina 155.

Programa 3. Feu un programa que doni el valor de la mitjana i extrema raó d'un segment de longitud 1.

Programa 4. Useu GeoGebra, o qualsevol altre programa anàleg, per a:
a) Dividir un segment en mitjana i extrema raó.
b) Dibuixar el rectangle auri corresponent.

Programa 5. Feu un programa que aproximi $\sqrt{5}$ amb deu xifres decimals i proporcioni la longitud de la mitjana i extrema raó d'un segment de longitud 1.

Programa 6. Useu GeoGebra, o qualsevol altre programa anàleg, per a dibuixar els polígons regulars de $3, 4, 5$ i 15 costats i els que s'obtenen doblant el nombre de costats dels ja dibuixats però amb menys de cent costats.

Programa 7. Feu un programa que, per a $n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12$ i 15, proporcioni la longitud del costat del polígon regular de n costats, en funció *a*) del radi R del cercle circumscrit i *b*) del radi r del cercle inscrit. [*Indicació.* Useu *i*) l'àlgebra i *ii*) la trigonometria.]

Programa 8. Feu un programa que, per a $n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12$ i 15, proporcioni el valor A_n de l'àrea del polígon regular de n costats, en funció *a*) del radi R del cercle circumscrit i *b*) del radi r del cercle inscrit.

Programa 9. Feu un programa que, donades tres longituds a, b i c, digui si són aptes com a longituds dels costats d'un triangle.

En cas afirmatiu, feu programes que determinin:
a) Si el triangle és rectangle, obtusangle o acutangle. [*Indicació.* Utilitzeu la conjunció d'Ei 47, i Eii 12 i 13.]
b) La longitud de la projecció del costat més curt damunt el més llarg.

Programa 10. Feu un programa que, usant el teorema de Tales, determini:
a) L'altura d'una piràmide.
b) La distància a la costa a la qual es troba un vaixell.

Apèndix A

Text dels *Elements* (Στοιχεῖα) d'Euclides. Llibres I, II, III, IV, V i VI

Μή εἶναι βασιλικήν ἀτραπόν ἐπὶ γεομετρίαν.[189]

EUCLIDES

Comentari general. Ningú dubta que un dels textos més notables de l'«esperit humà»[190] són els *Elements [de la Geometria]* que Euclides va escriure al segle III aC. Aquest llibre ha estat una obra de referència durant vint-i-dos segles fins que, l'any 1969, Jean Dieudonné va exclamar «A bas Euclide!».[191]

189. «No hi ha cap camí reial per a la geometria.» PROCLE (1970), edició anglesa, p. 57.

190. En paraules de JACOBI (1881-1891), volum I, p. 484.

191. Aquesta exclamació la féu en un seminari organitzat per l'Organisation Européenne de Coopération Économique (OECE, llavor de la futura OCDE) i és molt significativa. El matemàtic francès no pretenia, en absolut, denigrar la figura i l'obra del genial matemàtic alexandrí, sinó qüestionar i replantejar l'ensenyament de la matemàtica que en aquell moment s'impartia a les escoles elementals i als instituts europeus perquè el considerava excessivament basat en la geometria del triangle. Amb el seu crit de guerra, pretenia rematar l'ensenyament tradicional de la matemàtica, en què la geometria tenia un paper, al seu entendre, massa preeminent. Vegeu PLA (2012), p. 162.

Els *Elements* d'Euclides constitueixen un dels textos clau de la matemàtica. Contenen una part molt important del pensament geomètric grec, sistematitzat de manera estructurada i metòdica.[192] Es mereixen, doncs, una traducció i adaptació al català, anotada i comentada. La nostra voluntat explícita és proporcionar al lector, tant si és científic com si és humanista, un text que posi en relleu el teixit matemàtic de l'obra i que permeti disposar d'una visió completa —amb els èxits i les errades—, tècnica i acurada basada en el contingut del text.[193] No pretenem, com faria un filòleg de la llengua grega, recuperar al peu de la lletra l'obra tal com fou escrita per Euclides. Pretenem, com Teó d'Alexandria, salvant les distàncies, «aplanar les dificultats que podria plantejar, als lectors als quals va adreçada aquesta *Història*, la lectura d'aquesta obra».[194] El nostre objectiu és mostrar la lectura que en faria un matemàtic que ha dedicat part de la vida docent a la història de la matemàtica, deixant una mica de banda l'escrupolositat filològica.

Com s'indica al capítol precedent, els *Elements* euclidians constitueixen «una re-elaboració, una compleció i un aplegament dels resultats precedents»[195] que provoca que els *Elements* que l'havien precedit —d'Hipòcrates de Quios, Lleó, Teudi i Demòcrit—[196] esdevinguin obsolets. En definitiva, els *Elements* d'Euclides es converteixen en la font principal de la geometria preeuclidiana.

I, malgrat el caràcter d'obra didàctica que s'ha atribuït a aquesta obra, Euclides pretengué establir-hi, amb el màxim de rigor possible per a l'època en què vivia i com un corpus únic, els fonaments de la matemàtica que l'havia precedit. I desenvolupà

192. Tanmateix, és un text que conté molts elements per a la reflexió filosòfica, heurística, gnoseològica i metodològica de la matemàtica grega. Vegeu Pla (2010).

193. L'hi ajudaran les consideracions del capítol I i l'apartat dedicat a Euclides a *Grècia III*.

194. Frajese i Maccioni (1970), p. 27.

195. Frajese i Maccioni (1970), p. 12.

196. Pla (2016*c*), p. 239, 253 i 374-375.

aquest objectiu en l'àmbit de la síntesi. No hi féu cap concessió didàctica ni aplicada,[197] cosa que lliga amb les dues anècdotes que se li atribueixen (vegeu *Grècia III*).

D'alguna manera, Euclides respectà el desenvolupament històric que l'havia precedit —en l'obra hi ha llibres pitagòrics, eudoxians, teetians i democritians. Ho confirma el fet que alguns resultats que podria establir —i que establí més fàcilment usant la teoria de la proporció (llibre VI)— ja els havia concretat abans amb el mètode tangram (llibres I i II). I ho corrobora la preocupació euclidiana per a establir amb rigor resultats ja coneguts respectant, però, l'origen històric de la qüestió suscitada en cada proposició. Tanmateix, els resultats no els atribuí a ningú nominalment.

FIGURA A.1 *Euclides i l'arquitectura* (1334-1336). Baix relleu de Nino Pisano (vg. pàg. 353).

Com ja hem indicat al primer capítol, els *Elements* d'Euclides consten de tretze llibres —als quals, de vegades, se n'afegeixen dos més.

L'obra cobreix la geometria plana (llibres I, II, III i IV); la teoria de la proporció, seguint les petges d'Èudox (llibres V i VI); l'aritmètica pitagòrica (llibres VII, VIII i IX); els incommensurables (llibre X);[198] la geometria de l'espai (llibre XI); l'exhaustió (llibre XII), i, per fi, la construcció dels sòlids platònics (llibre XIII).

197. No hi ha mai cap exemple, cap càlcul, cap regla de mesura, ni cap intent d'aproximar valors numèrics concrets.

198. De fet, els llibres VII, VIII, IX i X constitueixen un corpus força independent de la resta. KAYAS (1978), per exemple, aplega tots els altres llibres al primer volum; i aquests quatre, al segon, com si els uns i els altres formessin dues realitats independents.

El lector atent s'adonarà de fins a quin punt l'ús concatenat dels «elements» és rigorós i complex. A voltes, la introducció d'una cadena de proposicions que té com a objectiu aconseguir demostrar una proposició més important o de més valor geomètric arriba a sorprendre.[199]

A.1 La geometria plana elemental: llibres I, II, III i IV

A.1.1 Llibre primer: EI

p. 13 **Comentaris al llibre I.** El llibre I, que, com ja hem dit i hem vist, fou l'objectiu dels *Comentaris* de Procle, consta, en un intent ordenador, de dues parts que podem identificar amb facilitat.[200]

D'entrada, la primera part del llibre I —una síntesi del concepte de matemàtica de Plató i Aristòtil—[201] conté tres menes d'elements: els «elements específics»;[202] les «definicions» pròpies del llibre[203] —en grec, ὅροι—,[204] i els «elements bàsics» o «generals», els postulats —en grec αἰτήματα.[205] Els primers dos grups d'elements fan referència als objectes geomètrics

199. Vegeu les taules de dependències dels «elements» al final dels paràgrafs que presenten cadascun dels tretze llibres. I també les indicacions de Frajese i Maccioni (1970) que esmentem a la nota 278 (pàgina 89).

200. Aquest llibre és molt idoni per a fer una aproximació als clàssics perquè el contingut és realment escolar, sense que això signifiqui que no tingui punts una mica difícils d'entendre en una primera lectura.

201. Vegeu el segon capítol de *Grècia III* i Pla (2016*c*), p. 294 i 346.

202. Per al concepte d'«element», vegeu el tercer capítol, § 2.26, de *Grècia III*; o bé Pla (2012), p. 48–52.

203. Vegeu la nota introductòria a les definicions §A.1.1*a* (pàgina 76).

204. En el sentit de 'condicions'.

205. En el sentit de 'demandes': el que es demana, que es sol·licita en l'ordre de la geometria.

i a algunes de les relacions que lliguen els uns amb els altres. I, finalment, aquesta part també conté les «nocions comunes» —en grec, κοιναὶ ἔννοιαι—,[206] que estableixen lleis que cal respectar «necessàriament» però que no s'apliquen només als objectes geomètrics sinó també als de caràcter científic (geomètrics, aritmètics, físics, astronòmics, etc.).[207]

La segona part —les quaranta-vuit proposicions del llibre, entre problemes i teoremes— admet una classificació en tres blocs de proposicions amb caràcter unitari. El primer bloc, *a*, engloba les vint-i-sis primeres proposicions, que estableixen les propietats dels triangles i, en particular, la «igualtat». El segon, *b*, està constituït per les proposicions que van de la vint-i-set a la trenta-dues, i que estableixen la «teoria dels paral·lels» —i, de retruc, el fonament de la geometria euclidiana. Aquest bloc s'acaba amb l'enunciat i la demostració del teorema: «La suma dels angles d'un triangle val dos angles rectes» (E I 32). I el tercer bloc, *c*, va de la proposició trenta-tres a la quaranta-vuit, i fa referència al que cal per a la quadratura dels paral·lelograms, en particular, el «mètode tangram generalitzat», i, de retruc, per a l'«equivalència» dels polígons. S'acaba amb el teorema de Pitàgores i el seu invers (E I 47 i 48).

El llibre I és, juntament amb els llibres II, III i IV, un llibre fonamentalment pitagòric. I, com ja hem dit en diverses ocasions, permet veure l'evolució del pensament de la geometria grega des de l'època de Tales i Pitàgores fins a la d'Euclides. És una geometria que evita tant la teoria de la proporció com l'incommensurable; però que, curiosament, no pot evitar l'«infinit en acte».

---

206. Amb el sentit de 'noció' entesa com a 'acte del pensament', més proper al raonament genèric.

207. L'ordre hauria de ser aquest: en primer lloc, les nocions comunes, de caràcter general; després, els postulats, de caràcter geomètric (aquests dos grups s'introdueixen al llibre I i afecten la resta). Finalment, hi haurien d'anar les definicions pròpies dels objectes geomètrics de cada llibre.

La importància i singularitat del llibre portaren Procle a escriure els *Comentaris al llibre primer dels Elements d'Euclides* (Σχόλια στο πρώτον βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη) i a mostrar fins a quin punt era pitagòric, és a dir, «un ensenyament liberal» basat en els ens idealitzats i l'elaboració d'un «sistema d'elements». Des d'aquest punt de vista, és un tractat que solament conté els resultats imprescindibles per a aconseguir-ne d'altres, si bé el respecte a la tradició històrica fa que també inclogui algunes proposicions que no són elements de cap altra proposició. Frajese ofereix la discussió que s'establí entre els qui defensaven que els *Elements* eren de tradició pitagòrica (del mateix Pitàgores o dels seus deixebles), de tradició estoica o derivats de les aportacions de Tales.[208]

p. 14

A.1.1*a* Les definicions d'EI (Ὅροι)[209]

Comentaris a les definicions d'EI. Gairebé tots els llibres comencen amb les definicions necessàries per a la comprensió dels termes que s'hi empren, és a dir, proposen les «condicions» que han de satisfer els objectes, o, seria millor dir, les relacions que lliguen l'objecte definit amb algun dels objectes definits prèviament. I, naturalment, el primer capítol no n'és una excepció, ans al contrari: conté vint-i-tres definicions que tenen, però, com a peculiaritat que són bàsiques i necessàries per als llibres geomètrics. En aquest sentit, podem dir, doncs, que esdevenen elements bàsics.

Tanmateix, recordem que algunes d'aquestes definicions són «conceptes primitius» i, per tant, indefinibles. I d'altres, en canvi, són simples «descripcions» que ens permeten reconèixer els objectes, individualitzar l'objecte definit.

208. Vegeu Frajese i Maccioni (1970), p. 17–18.

209. Recordem que la paraula grega ὅροι significa 'terme' en el sentit en què s'usa en l'expressió «creu de terme», és a dir, la línia o el senyal del confí.

[Text de les definicions d'Eɪ]

Dɪ 1. Un *punt* —σημεῖόν—[210] és el que no té cap part.[211]

Dɪ 2. Una *línia* —γραμμὴ— és una longitud sense amplada.[212]

Dɪ 3. Els *extrems* —πέρασ— *d'una línia* són punts.[213]

Dɪ 4. La *línia recta* és la que jau igualment —κεῖται— damunt els propis punts.[214]

Dɪ 5. Una *superfície* —ἐπιφάνεια—[215] és el que solament té llargada i amplada.[216]

Dɪ 6. Els *extrems d'una superfície* són línies.[217]

---

210. En el sentit de 'senyal, signe'.

211. Mantenim el singular μέρος, 'part'. El terme «part» —al costat del terme «parts»— el retrobarem als llibres v i vii, on té un paper molt important però diferent: geomètric i aritmètic, respectivament.

Aquesta definició de «punt» lliga amb la que proporciona Plató al *Sofista*, 245 a, i a *La República*, volum ii, 525 d-526 a; edicions catalanes, p. 90 i 136, respectivament. Procle, en canvi, afirma que la unió d'aquests dos termes és pitagòrica, «el punt és la unitat dotada de posició». Vegeu Procle (1970), § 85–96, p. 70–79, i Frajese (1969), p. 92–95.

212. La paraula grega πλάτος significa 'amplada' i, per tant, ἀπλάτές és 'sense amplada'. És un exemple clar d'ens geomètric «idealitzat».

213. La paraula grega, en plural, πέρατα significa 'extrem' en el sentit de 'final', és a dir, 'extrem final'. En definitiva, és un objecte limitat en l'extensió pròpia. Es tracta, doncs, de «segments» de línia. Vegeu la definició Dɪ 13; i Frajese i Maccioni (1970), nota 3, p. 66.

214. El text grec diu: ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ᾽ ἑαυτῆς σημείοις κεῖται, o sigui, «jau igualment», ja que l'expressió grega ἐξ ἴσου significa això. Ho podem entendre com «es troba col·locada igualment» —que és el que passa quan la tirem amb un regle i un llapis: tot el traç jau de la mateixa manera damunt el regle. Vegeu la nota 337 (pàgina 102).

Hi ha qui afirma que l'expressió llatina *ex æquo*, que encara avui s'empra per a significar 'amb igualtat de mèrits', va néixer amb la intenció de precisar aquesta idea.

215. Pel que fa a aquest terme grec i el de Dɪ 7, vegeu Puertas (1991), volum i, nota 3, p. 191.

Per una qüestió de claredat metodològica, nosaltres usarem la paraula «superfície» per a referir-nos a l'objecte geomètric en si mateix i «àrea» per a l'extensió de la superfície, que actualment seria un nombre real.

216. No té altura. Novament trobem un intent d'idealitzar un objecte matemàtic. Es tracta, doncs, de segments de superfície.

217. Euclides imposa la limitació de l'objecte geomètric una altra vegada (vegeu Dɪ 3).

DI 7. Una *superfície plana* —ἐπίπεδον ἐπιφάνειά—[218] és aquella que jau igualment en les pròpies línies rectes.[219]

DI 8. Un *angle* —γωνία— *pla* és la inclinació —κλίσισ— de dues línies, una damunt de l'altra, d'un mateix pla que es toquen però no es troben damunt una mateixa línia recta.[220]

DI 9. I quan les dues línies que contenen —περιέχουσαι—[221] l'angle són línies rectes, l'angle s'anomena *rectilini* —εὐθύγραμμος.

DI 10. Quan un segment[222] aixecat —σταθεῖσα— damunt d'un [altre][223] forma[224] angles adjacents —ἐφεξῆς—[225] iguals,[226] cada un és *recte* —ὄρθὴ γωνία—,[227] i el segment aixecat s'anomena *perpendicular* —κάθετοσ—[228] a la recta damunt la qual s'ha aixecat.

DI 11. Un angle *obtús* —ἀμβλεῖα— és més gran que un de recte.

DI 12. Un angle *agut* —ὀξεῖα— és més petit que un de recte.

DI 13. Una *frontera* —ὅροσ—[229] és l'extrem de quelcom.

218. Aquesta paraula la retrobarem a DXI 11.

219. Vegeu DI 4 i observeu que, de fet, es tracta dels segments rectilinis propis de la superfície.

220. La dificultat que comporta aquesta definició, en la qual els costats dels angles són línies no necessàriament rectes —cosa que Euclides solament usa a EIII 7 i 16—, la podem veure al text B.2.2*n* de *Grècia III*.

Fixem-nos que Euclides parla d'«angle pla» en el sentit que els dos costats i, de retruc, el vèrtex es troben en el mateix pla, és a dir, que és un «angle coplanari»; però exclou l'angle que nosaltres anomenem actualment «angle pla», que és l'angle que forma un únic segment rectilini i té el vèrtex en un punt qualsevol d'aquest segment. Vegeu més endavant el comentari a P 4 i EI 13 i 14.

221. Usa la paraula grega «contenen» en el sentit d''abracen'.

222. Més endavant, a la nota 249 (pàgina 82), justificarem l'ús del terme «segment» encara que, indirectament, ja hagi aparegut a DI 3.

223. Aquesta condició és indispensable. Vegeu EIII 32.

224. En el sentit de 'fa, produeix'.

225. En el sentit d''en ordre'.

226. Euclides mai no precisa què entén per «angles iguals». Vegeu P 4.

227. Usem l'expressió grega ορθὴ γωνιῶν per a indicar el plural «angles rectes».

228. En el sentit de 'caure', com fa el fil d'una plomada damunt d'un terreny.

229. Usa «frontera» com a 'límit'.

DI 14. Una *figura* —σχῆμα—[230] és el que es troba comprès en una o diverses fronteres.

DI 15. Un *cercle* —κύκλος— és una figura plana envoltada —περιεχόμενον—[231] per una sola línia [que s'anomena *circumferència* —περιφερέια—][232] i en què totes les línies rectes que hi incideixen des d'un [determinat] punt interior de la figura són iguals.

DI 16. Aquest punt s'anomena *centre* —κέντρον— del cercle.[233]

DI 17. Un *diàmetre* —διάμετροσ— del cercle és qualsevol línia recta que passa pel centre i està limitada, en tots dos costats, per la circumferència del cercle. Aquesta recta divideix el cercle en dues parts iguals.[234]

DI 18. Un *semicercle* —ἡμικλύκιον— és la figura limitada per un diàmetre i la circumferència[235] que talla —ἀπολαμβανομένης.

230. Totes les definicions en què apareixen els conceptes de «vora», «límit» i «frontera» posen de manifest la voluntat de respectar el caràcter finit en el si de la geometria.

231. Usa la paraula grega en el sentit d''abraçada'.

232. És Heiberg qui ho posa entre claudàtors. És útil per a simplificar l'enunciat d'algunes definicions i proposicions.

233. En aquesta definició i en la següent sobreentenem «i també de la circumferència». Vegeu la nota 267 (pàgina 87).

234. Diu διχά τέμνεῖν, «dividir en dues parts», però cal entendre que són «iguals», és a dir, el centre «dimidia» els diàmetres. Vegeu DI 18. Això, tanmateix, caldria provar-ho perquè és una propietat ulterior del diàmetre.

Cal entendre implícitament que sempre és possible fer un diàmetre des d'un dels punts de la perifèria del cercle. És a dir, sempre podem tirar un segment que surt d'un punt de la circumferència, passa pel centre i arriba a un altre punt de la circumferència (simètric respecte del centre).

Observem que si, fixat un punt de la circumferència, portem el radi tres vegades successivament, el darrer punt que queda determinat a la circumferència és l'extrem oposat del diàmetre que té l'altre extrem al punt inicial.

L'operació «tirar un diàmetre» és molt útil a l'hora de sumar segments. Vegeu la nota 279 (pàgina 89). I lliga també amb la «unicitat» de la prolongació d'un segment amb un altre segment a fi d'obtenir-ne un de més llarg. Vegeu el postulat P 2.

235. Euclides usa l'expressió «circumferència» tant per a referir-se a la circumferència sencera com a un arc de circumferència.

El seu centre[236] és el mateix que el del cercle.[237]

Di 19. Les *figures rectilínies* —σχέματα εὐϑύγραμμά— són les que es troben limitades per línies rectes. Les *trilàteres* —τρίπλευρα— ho estan per tres, les *quadrilàteres* —τετράπλευρα— per quatre i les *multilàteres* —πολύπλευρα— per més de quatre.

Di 20. D'entre les figures trilàteres, el *triangle equilàter* —ἰσόπλευρον— és aquell que té els tres costats iguals, l'*isòsceles* —ἰσοσκὲλεσ— el que només en té dos i l'*escalè*[238] —σκαληνόν— el que té els tres costats diferents —ἀνίσους.

Di 21. D'entre les figures trilàteres, el *triangle rectangle* —ὀρϑογώνιον— és aquell que té un angle recte, l'*obtusangle* —ἀμβλυγώνιον—, un angle obtús, i l'*acutangle* —ὀξυγώνιον—, tots tres aguts.

Di 22. D'entre les figures quadrilàteres,[239] el *quadrat* —τετράγονον— és equilàter i rectangle;[240] el *rectangle* —ἑτερόμηκεσ—,[241] rectangle però no equilàter; el *rombe* —ῥόμβοσ—,[242] equilàter però no rectangle;[243] i el *romboide* —ῥόμβοειδὲσ—, ni equilàter ni equiangle, i amb els costats i els angles oposats iguals.[244] La resta de figures quadrilà-

---

236. Procle s'estranya que un centre es pugui trobar a la frontera de la figura i no dins, a l'interior de la superfície tancada per la frontera. Procle (1970), § 160, edició anglesa, p. 127.

237. O bé el mateix que el de la circumferència. Vegeu la nota 252 (pàgina 82).

238. Recordem que σκέλος és 'cama'. Vegeu el comentari filològic a Frajese i Maccioni (1970), p. 69.

239. Fixem-nos que, a diferència de la definició anterior, aquí ha d'analitzar tant els costats com els angles. En el cas dels triangles, no serà així: la naturalesa dels angles és objecte de proposicions *ad hoc*.

Recordem que Aristòtil, a la taula de dualitats (*Metafísica* i, 986 a, i el text A 6.12, a Pla (2016*c*), p. 416, que correspon al contingut de la p. 108), ofereix la dualitat quadrat/oblong.

240. En el sentit 'els angles són rectes'.

241. Euclides usa el terme 'oblong' com a equivalent a 'heterogeni'.

242. Sembla que aquesta paraula prové del verb ῥέμβειν, 'giravoltar', que donaria ῥέμβω, 'baldufa'.

243. Sense usar el postulat P 5, es pot veure que els angles oposats són iguals (Ei 8, pàgina 99). De fet, és un paral·lelogram equilàter, però per a veure-ho cal P 5. Vegeu, més endavant, Ei 34 (pàgina 132).

244. Si acceptem el postulat P 5, són els «paral·lelograms» (Ei 33, pàgi-

teres s'anomenen *trapezis* —τραπέζια.[245]

Dɪ 23. Els *segments paral·lels* —παράλληλοί— són segments rectilinis que, trobant-se en un mateix pla, si es prolonguen indefinidament —εἰς ἄπειρον—[246] en totes dues direccions —ἐφ᾽ ἑκάτερα τὲ μέρη—, no es tallen ni en l'una ni en l'altra.

A.1.1*b* Els postulats d'Eɪ (Αἰτήματα)[247] p. 18

Comentaris als postulats d'Eɪ. L'aparat deductiu d'aquesta obra es basa en els postulats —geomètrics— i en les nocions comunes —d'àmbit més ampli. Vegem-los.

Els postulats P 1, P 2, P 3 i P 5 són «existencials», en un sentit operatiu —problemàtic— del terme. En canvi, el postulat P 4, el més especial de tots, sembla que no tingui aquesta especificitat (nota 253, pàgina 83).

---

na 131). Tanmateix, no els anomena «paral·lelograms», que són els quadrilàters determinats per dues parelles de segments paral·lels que es tallen, ni tampoc «superfícies paral·lelogràmiques», que, de fet, són els paral·lelograms. Però els necessita en les proposicions Eɪ 33 i Eɪ 34 (pàgines 131 i 132). Li falta la proposició que demostra que els romboides són paral·lelograms, usant P 5. Vegeu el problema 12 (pàgina 62).

Tampoc no diu res ni del diàmetre d'un paral·lelogram —la diagonal o la recta que uneix dos vèrtexs oposats— ni dels complements —els dos paral·lelograms que determina la diagonal i que no hi participen quan tallem un paral·lelogram per un parell de segments, cada un paral·lel a una de les parelles de costats paral·lels. Però els usa a les proposicions Eɪ 34 i Eɪ 43 (pàgines 132 i 142), respectivament.

245. Recordem que la paraula grega τραπέζιον significa 'taula petita'.

Aquesta definició de «trapezi» no és la que usem actualment. Vegeu el problema 5 (pàgina 60).

246. Significa 'fins a l'infinit', a diferència d'ἐπ᾽ ἄπειρον, 'sense límit', si bé s'usen indistintament. L'infinit hi apareix, doncs, de forma explícita. Vegeu com tracta l'infinit al capítol dedicat a les aportacions d'Euclides, § 2.2.8 (*Grècia III*). Queda absolutament clar que els objectes que prolonga són segments.

Aquesta definició planteja un problema: si el que defineix *no és una figura* perquè l'objecte definit no té límits, què és, doncs?

247. En el sentit de 'delimitacions', ja que Euclides els dota d'un caràcter clarament definitori.

[Text dels postulats d'Eɪ]

P 1. D'un punt a un altre es pot —ἠιτήσθω—[248] tirar —ἀγαγεῖν— un segment rectilini [únic].[249]

P 2. I prolongar-lo de forma contínua —κατὰ τὸ συνεχὲσ— amb una recta limitada —πεπερασμένην.[250]

P 3. Per a cada centre i distància —διαστήνατι—,[251] es pot descriure un cercle.[252]

---

248. En el sentit 'es postula'.

249. Fixem-nos —és important— en el caràcter finit de les rectes; de fet, són «segments» que uneixen dos punts. Les rectes euclidianes «uneixen dos punts» que en són els extrems. Ometrem, doncs, la paraula «recta», llevat dels casos en què sigui «actualment infinita». Usarem el terme «segment» fins i tot per a referir-nos als paral·lels (vegeu la nota 246). Per a la unicitat, vegeu la nota 252 i la demostració d'Eɪ 4.

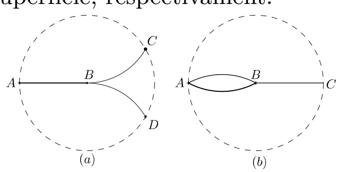
250. Atenció! Afirma la possibilitat de prolongar un segment amb un segment, però no diu pas que, donats dos segments, puguem prolongar l'un amb l'altre per un extrem, ja que la proposició Eɪ 2 (pàgina 89) seria totalment supèrflua.

Tampoc diu —ni aquí ni a P 1— que la línia que uneix els dos punts sigui única ni que la prolongació ho sigui. Aquí podem recórrer al fet que el diàmetre d'un cercle el divideix en dues parts iguals. Vegeu la nota 252.

251. Euclides diu que, donat un punt i un segment, podem tirar la circumferència que té el punt com a centre i el segment com a distància. D'ara endavant, aquest segment l'anomenarem «radi» de la circumferència, atès que tots els radis són iguals. Euclides no usa aquest terme. De fet, «radi» és una paraula que la matemàtica grega no introduí. Quan els calia recórrer-hi, usaven l'expressió αἱ ἐκ τῶν κέντρων, 'la recta que ix del centre'.

Diem que els objectes geomètrics que es poden aconseguir usant només els postulats P 1, P 2 i P 3 s'han obtingut «amb regle i compàs».

252. Usarem «circumferència» o «cercle» si ens interessa la corba o la superfície, respectivament.



Si unim aquest postulat al fet que el diàmetre divideix el cercle en dos semicercles iguals, podem establir la unicitat tant del segment que uneix dos punts com del segment prolongació d'un segment. Vegeu les figures *a* i *b*. A la figura *a*, suposem que la prolongació de AB no és única (hipòtesi de l'absurd). Tirem la circumferència de centre B i radi AB. Tallarà les prolongacions a C i D. Obtenim dos diàmetres, ABC i ABD, però

P 4. Tots els angles rectes són iguals —ἴσαι— entre si —ἀλλήλαις.[253]

P 5. [**Postulat dels segments paral·lels.**] Si un segment cau damunt dos segments i els angles interns del mateix costat —ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέ- ρη—[254] fan junts menys de dos [angles] rectes —γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ—, els dos segments, prolongats *indefinidament* —ἄπειρον—, es tallen pel costat en què els angles valen menys de dos angles rectes.[255]

---

cap divideix el cercle en dues parts iguals. A *b* suposem que hi ha dos segments que van de A a B (hipòtesi de l'absurd). Tirem la circumferència de centre B i radi AB (un dels dos, atès que poden ser diferents) i prolonguem (el radi AB) fins a tallar la circumferència (al punt C, no importa si la prolongació és única o no). Tenim dos diàmetres ABC i cap no divideix el cercle en dues parts iguals. Vegeu Procle (1970), § 215-216, edició anglesa, p. 168–169.

253. És un intent d'evitar el moviment. Vegeu Pla (2010), p. 46-47.

Dues circumstàncies el fan operatiu:

a) Donat un segment, tots els segments perpendiculars que hi puguem tirar determinen angles iguals damunt el segment i, en conseqüència, sense usar P 5, són paral·lels. Vegeu Ei 17.

b) La unicitat dels segments que uneixen els punts A i B, i de les prolongacions per un extrem qualsevol es veu garantida. Suposeu que, a les figures *a* i *b* de la nota 252, tirem una perpendicular al segment AB pel punt B. Els angles que determina aquesta perpendicular al segment ABC han de ser iguals, cosa que no passa si no hi ha unicitat. Vegeu Procle (1970), § 188–191, edició anglesa, p. 147–150.

254. Vegeu la nota 314 (pàgina 97).

255. És el famós postulat dels (segments) paral·lels. Euclides hi imposa «que, en certes condicions, dos segments —convenientment prolongats— es tallen necessàriament».

La geometria que satisfà el postulat P 5 s'anomena «euclidiana». I d'aquest postulat es segueix que «per un punt exterior a un segment sempre podem tirar-hi un [segment] paral·lel i *un de sol*».

Les proposicions en què no s'usa P 5 les anomenem proposicions de la geometria «neutral». És a dir, la geometria basada només en els postulats P 1, P 2, P 3 i P 4 és la «geometria neutral».

Aquest postulat no es pot considerar ni intuïtiu ni elemental, atès que invoca l'infinit «en acte», ja que necessita el concepte de paral·lelisme. Euclides imposa la condició que fa que «[les prolongacions de] dos segments es tallin» en el finit, és a dir, una condició existencial. Afirma que «el punt de tall existeix».

Ningú dubtà de la seva veracitat però sempre fou considerat com una

Comentari al postulat P 5. Aquest postulat s'atribueix a Euclides i intenta respondre les qüestions que havia plantejat Aristòtil sobre els paral·lels.[256]

Podem pensar una raó per la qual Euclides l'introduí amb una gran genialitat. Considerem un triangle $\triangle ABC$ de base AB i costats AC i BC (figura a). Sense usar P 5, s'estableix que els angles $\widehat{CAB}$ i $\widehat{CBA}$ junts fan menys de dos angles rectes (EI 17).

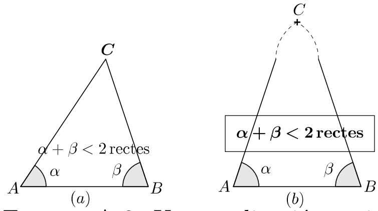


FIGURA A.2 Una explicació possible de la necessitat del postulat P 5.

Podem garantir-ne el recíproc? Si dos segments CA i CB ixen dels extrems A i B del segment AB i els angles $\widehat{CAB}$ i $\widehat{CBA}$ junts fan menys de dos angles rectes (figura b), determinen un triangle i eviten que els segments siguin asimptòtics com un arc d'hipèrbola i l'asímptota? La resposta és: sí.

En definitiva, tenim una condició necessària i suficient perquè tres segments AB, CA i CB formin un triangle.

Per a acabar aquesta anàlisi dels postulats, indiquem que Euclides no dóna cap orientació que ens permeti saber en quines condicions es tallen dues circumferències.[257]

p. 21
A.1.1*c* Les nocions comunes d'EI (Κοιναὶ ἔννοιαι)

Comentaris a les nocions comunes d'EI. No hi ha acord sobre el nombre de nocions comunes que donà Euclides, moltes de les quals són aristotèliques.[258] Les cinc que s'acostumen a

proposició que calia demostrar. Vegeu, en un nivell elemental, BURTON (1989), capítol 11, p. 525–563; i, més tècnics, en català, REVENTÓS (2008); en anglès, GRAY (1989) i GREENBERG (1993); i, en francès, ÉFIMOV (1981).

256. Vegeu el text C 11.8*d*, PLA (2016*c*), p. 599.

257. Vegeu la nota 387 (pàgina 113).

258. Heath, seguint Heiberg, en dóna cinc, com Fitzpatrick. En canvi, Kayas, Vera i Vitrac en donen nou.

considerar fan referència al comportament de la igualtat, entenent per «igual» tant la congruència com l'equivalència.[259]

Vegem les cinc de Heath:

[Text de les nocions comunes d'Ei]

Nc 1. Coses iguals a una tercera cosa són iguals entre si.

Nc 2. Si afegim coses iguals a coses iguals, resulten coses iguals.

Nc 3. Si traiem coses iguals a coses iguals, resulten coses iguals.[260]

Nc 4. Coses que coincideixen —ἐφαρμόζοντα—[261] entre si són iguals.

Nc 5. El tot —ὅλον— és més gran —μεῖζον— que la part —μέρους.[262]

Comentem les altres en una nota.[263]

---

259. Vegeu el comentari de la nota 263. És a dir, encara que no hi hagi concepte numèric en la geometria euclidiana, aquí la «igualtat» fa referència a l'«extensió» i no necessàriament a la forma. És clar que si són idèntics en la forma, són equivalents; però a l'inrevés és fals. Pensem en el tangram.

260. Aristòtil (1987), llibre i, capítol 10, 76 a 41; o Aristòtil (2000), xi, 4, 1061 b 20, on el dóna com a axioma.

261. Ve del verb actiu ἐφαμόζειν, que en passiu, ἐφαρμόζεσθαι, significa 'aplicar', sense imposar que el que s'aplica s'ajusti a allò aplicat. En activa, ἐφαρμόζειν, significa 'ajustar, encaixar'. Actualment, s'usa el mot «congruents» i també, més tècnic, «congrus». Tanmateix, Euclides no indica què està permès i què no ho està, en l'acció d'aplicar.

262. Té un caràcter més metafísic que científic. Això no obstant, fa que, en referir-se a la part d'una extensió o d'un nombre natural, el total no pugui ser considerat part. En concret, en el cas dels nombres naturals, el nombre no és part —divisor— del nombre.

263. Les nocions comunes —quan se'n donen nou— són:

Nc 1′. És la noció comuna 1.

Nc 2′. És la noció comuna 2.

Nc 3′. És la noció comuna 3.

Nc 4′. Si afegim coses iguals a coses diferents, els totals són diferents. (És evident que si afegim coses iguals a coses diferents, els totals no poden ser iguals, perquè això contradiria la Nc 2. Cal entendre, però, que es manté el tipus de desigualtat, la gran es converteix novament en la gran. És a dir, «suposem que si una cosa és més gran [més petita] que una altra i, a totes dues, els afegim la mateixa cosa, la primera addició serà també més gran [o més petita] que la segona».) Vegeu, per exemple, la proposició Ei 17 (pàgina 110). Kayas (1978), volum i, p. 2, afegeix la Nc anàloga per a la diferència de segments.

p. 26

A.1.1d_1 Les proposicions [neutrals] d'Ei

[*Geometria neutral*]

Ei 1. [*Enunciació.*] *Volem construir un triangle equilàter sobre un segment rectilini donat.*[264]

Nc 5′. Els dobles d'una mateixa cosa són iguals entre si (conseqüència immediata de Nc 2).

Nc 6′. Les meitats d'una mateixa cosa són iguals entre si (conseqüència immediata de Nc 2 perquè ho és de l'anterior).

Nc 7′. És la noció comuna 4 (pàgina 85).

Nc 8′. És la noció comuna 5 (pàgina 85).

Nc 9′. Dos segments rectilinis amb els extrems comuns no contenen mai una àrea.

De fet, aquesta noció comuna 9′ caldria incloure-la en el grup dels postulats perquè fa referència als segments rectilinis que són objectes geomètrics. Euclides l'usa a Ei 4 i a Exi 3, per exemple.

Fixem-nos que, com dèiem, les nocions comunes 1, 2, 3, 4, 5′ i 6′ fan referència a la igualtat, entesa com a congruència i com a equivalència. I, si acceptem l'1, que estableix la «transitivitat» de la igualtat, lliguem aquesta igualtat amb les operacions aritmètiques de sumar i restar; i de doblar i dimidiar. És curiós, tanmateix, que Euclides no parli de multiplicar ni de partir en parts arbitràries.

La noció comuna 7′ té a veure amb el moviment i amb el caràcter inalterable dels objectes de l'espai quan són moguts. És una noció comuna difícil de classificar: ateny objectes geomètrics però sotmesos al moviment, i el moviment cal considerar-lo exclòs de la geometria. Pensem, però, en el postulat P 4. Vegeu Pla (2010), p. 46–47.

La noció comuna 8′ és filosòfica i té molt a veure amb la «finitud». De fet, exclou la possibilitat de l'«infinit» en el sentit de Dedekind.

264. Euclides diu «una recta limitada» —ἐὐθεῖας πεπερασμένη—, que, d'ara endavant, usant els termes actuals, anomenarem «segment rectilini», i quan no hi hagi perill de confusió, simplement «segment».

Es tracta d'un «problema» —en el sentit de Pappos— i, per tant, consta de «construcció» i «demostració». Usarem els símbols ♣ i ♠ per a indicar el final de la construcció i de la demostració, respectivament. I, quan una demostració procedeixi «per casos», tancarem també la demostració parcial de cada cas amb el símbol ♠.

A les figures, usarem el conveni següent: el traç gruixut per a les dades, el mitjà per a les construccions i el fi o puntejat per a les figures auxiliars.

Recordem que Procle diu (vegeu Procle (1970), § 203, edició anglesa, p. 159, i la taula 2.2 i el text B 2.2i de *Grècia III*):

[*Exposició.*] Sigui AB el segment donat.[265]

[*Especificació.*] Hem de construir un triangle equilàter de costat AB.[266]

[*Construcció.*] Amb centre al punt A i radi AB tirem [la circumferència] $\bigcirc BCD$.[267] [P 3][268]

Cada problema i cada teorema complet, amb totes les parts, han de contenir els elements següents: enunciat (πρότασις), plantejament (ἔκθεσις), especificació (διορισμός), construcció (κατασκευή), demostració (ἀπόδειξις) i conclusió (ἀποδειξις).

En aquesta proposició, retindrem totes les parts, però en les altres, ometrem la conclusió, que és la repetició del plantejament, i solament posarem en relleu la «construcció» i la «demostració».

Els enunciats s'anomenen «proposicions» perquè, com veurem més endavant (§ 2.2.11 de *Grècia III* i als textos que s'hi citen), les proposicions es classifiquen en «problemes» —el que s'ha de fer— i «teoremes» —el que s'ha de provar, segons Pappos. I, per tant, la paraula «teorema» té una connotació específica.

265. A les figures, usarem les lletres A, B, C, E, etc. El text grec usa, naturalment, lletres gregues, és a dir, *A, B, Γ, Δ, E*, etc. Heus ací la introducció d'un «simbolisme» tant per a designar punts com segments, angles, triangles, etc. Aquest simbolisme de la geometria grega és el primer simbolisme de la història que s'empra d'una manera sistemàtica.

266. Diu «sobre el segment AB» però ens ha semblat més clar dir «de costat AB».

En l'exposició, usarem el mètode expositiu de Heath (Heath (1925)), que consisteix a expressar cada pas en un paràgraf perquè, malgrat que allarga el text, el fa molt més clar, sobretot quan és complex i abstrús.

Seria més correcte usar l'expressió $\overline{AB}$ per a indicar que es tracta d'un segment d'extrems A i B, i reservar l'expressió AB per a la recta que passa pels punts A i B sense que en siguin necessàriament els extrems. Però no ho farem perquè, als *Elements*, les «rectes» gairebé sempre són segments, i així les anomenarem. Quan no ho siguin ho explicitarem.

267. Com ja hem indicat, Euclides només usa el terme «cercle», un terme que reservarem per a aquells casos en què calgui recórrer a la superfície delimitada per la circumferència. És a dir, si ens cal la corba, usarem l'expressió «circumferència»; si ens cal la superfície, «cercle». Usarem «$\bigcirc DEF$» per a indicar la circumferència que passa pels punts D, E i F, o el cercle tancat per aquesta circumferència; o bé «$\bigcirc(A; MN)$» quan ens interessi especificar-ne el centre, A, i el radi, MN.

268. Al marge dret o esquerre, indicarem, entre claudàtors, la definició, el postulat, la noció comuna o la proposició que s'hagi emprat en cada afirmació. I, tal com hem fet fins ara, i hem indicat a la nota 35 (pà-

I, amb centre al punt B i radi BA, [la circumferència] ○ACE. [P 3]

Unim el punt C en què es tallen [totes dues circumferències][269] amb els punts A i B, i obtenim els segments CA i CB.[270] [P 1] ♣

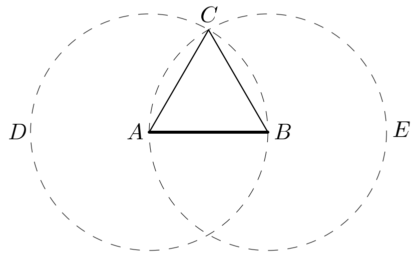


FIGURA EI 1

[*Demostració.*] Ara, com que el punt A és el centre de la [circumferència] ○BCD, [els segments] AC i AB són iguals. [DI 15]

Novament, com que el punt B és el centre de la [circumferència] ○ACE, [els segments] BC i BA són iguals. [DI 15]

Però hem establert també que [els segments] AC i AB són iguals.[271]

Per tant, cada un dels segments CA, CB és igual al segment AB.[272]

I, com que coses iguals a una altra cosa són iguals entre si, [Nc 1][273] resulta que [el segment] CA és igual a [el segment] CB.[274]

---

gina 12), usem les abreviacions P i Nc per a indicar «postulat» i «noció comuna», respectivament, seguides del número corresponent. En el cas de les definicions i les proposicions, usem D i E, respectivament, seguides del número del llibre i del número corresponent dins el llibre. Per exemple, DI 7 i EI 7 signifiquen «definició 7 del llibre I» i «proposició 7 del llibre I», respectivament.

269. Aquí Euclides fa una afirmació —«les dues circumferències es tallen en un punt»— que no justifica amb cap postulat ni amb cap noció comuna. Això fa que, d'alguna manera, aquesta afirmació sigui dubtosa o, fins i tot, falsa i que, de retruc, no estableixi l'existència del triangle equilàter de costat donat d'una manera correcta. Potser hauria estat més oportú imposar aquesta existència com un postulat. Vegeu FRAJESE (1968). A més, suposa també que dos segments (rectilinis) no poden compartir un segment (rectilini). Vegeu la nota 252 (pàgina 82).

270. D'ara endavant, direm «unim CA» per a indicar que unim el punt C amb el punt A.

271. Fixem-nos que Euclides treballa amb molta cura i malgrat tot..., vegeu la nota 269.

272. Euclides pot usar AB o BA en un mateix context; és a dir, pot usar AB i BA per a indicar el mateix segment.

273. D'ara endavant ometrem repetir l'enunciat de Nc 1. Solament n'indicarem l'ús.

274. El text usa l'expressió: «[l'objecte] $\mathfrak{A}$ és igual a [l'objecte] $\mathfrak{B}$»;

Per tant, els tres segments CA, AB i BC són iguals entre si.[275]

[*Conclusió.*] El [triangle] $\triangle ABC$ és equilàter [Di 20]

i s'ha construït sobre el segment donat AB.[276]

I això és el que volíem demostrar.[277] ♠[278]

Ei 2. *Volem portar, a un punt donat* [*com a extrem*], *un segment igual a un* [*segment*] *donat.*[279]

Siguin A el punt donat i BC el segment donat.[280]

---

nosaltres, d'ara endavant, emprarem «[els objectes] $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ són iguals».

275. Euclides diu «línia recta» (nota 264, pàgina 86), que nosaltres traduïm amb el terme «segment [rectilini]». No hi insistirem més.

276. En la conclusió, Euclides repeteix el contingut de l'especificació. Com ja hem dit abans, en general, nosaltres ometrem la conclusió.

277. Euclides diu: ὅπερ ἔδει ποιῆσαι («això és el que volíem fer»), reconvertit en «QED», que abreuja l'expressió llatina «quod erat demonstrandum».

278. Aquesta proposició s'usa a Ei 2, 9, 10 i 11. Al primer capítol, al final del resum de cada llibre, hem ofert una taula dels elements en els quals es basa cadascuna de les proposicions i no els recollim a l'índex de citacions. Ometrem també la informació inversa: indicar, un cop s'ha establert una proposició, a quines proposicions s'aplica després. El lector interessat la trobarà, al final de cada proposició, a Frajese i Maccioni (1970).

279. Breument, direm que «hem traslladat el segment BC al punt A».

De fet, Euclides diu que el seu compàs —vegeu com ha estat descrit en el postulat P 3— té memòria: donat un segment, el podem portar a un punt donat i fer un cercle que tingui el segment com a radi i el punt com a centre. Fixem-nos que, a la demostració d'Ei 1, cadascun dels radis que usa per a tirar les circumferències té com a extrems els punts A i B del segment donat. Però no sempre és així.

Caldrà recórrer a aquesta proposició per a poder garantir l'addició de segments en un segment suma, cosa que Euclides no menciona mai de forma explícita. Vegeu la nota 250 (pàgina 82). Un cop s'ha portat un segment donat a un extrem d'un altre segment donat, aquest darrer es pot prolongar i usar la circumferència per a tallar la prolongació. Atenció, cal prolongar-lo suficientment. Però, si tenim present la nota 234 (pàgina 79), no hi ha cap problema: considerem un dels extrems, del segment més llarg donat, com a centre, i tirem una circumferència de radi l'altre segment, més curt (o igual), que talla el primer segment i determina el radi. Prolonguem aquest segment fins a tenir el diàmetre. Haurem aconseguit el segment suma dels dos segments donats.

280. Aquesta proposició admet diversos casos segons quina sigui la posició relativa del punt C respecte del segment AB. En situacions com

Volem fer un segment, amb extrem al punt donat A, igual al segment donat BC.

[*Construcció.*] Unim AB. [P 1]

Fem un triangle equilàter $\triangle DAB$ de costat AB. [Ei 1][281]

Els segments AE, BF prolonguen els segments DA, DB. [P 2]

Amb centre a B i radi BC tirem la circumferència $\circ CGH$. [P 3]

I, novament, amb centre a D i radi DG,[282] tirem la circumferència $\circ GKL$. [P 3] ♣

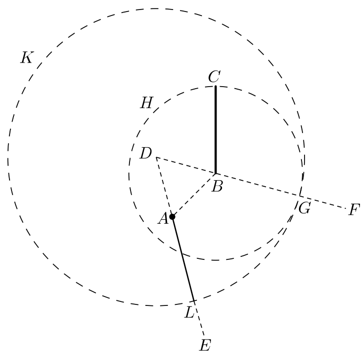


Figura Ei 2

[*Demostració.*] Aleshores, com que el punt B és el centre del cercle $\circ CGH$, BC és igual a BG. [Di 15]

I, com que el punt D és el centre del cercle $\circ GKL$, els (segments) DL i DG són iguals. [Di 15]

I DA i DB també. [Di 20]

Per tant, el romanent AL és igual al romanent BG. [Nc 3]

Però hem vist que BC és igual a BG.

Per tant, els segments AL, BC són [tots dos] iguals al segment BG.

De retruc, el segment AL també és igual al segment BC. [Nc 1][283]

I això és el que volíem demostrar. ♠

Ei 3. *Donats dos segments diferents, volem sostreure el més petit del més gran.*[284]

---

aquesta, Euclides acostuma a considerar un cas, normalment el més difícil. La resta de situacions les deixa com a exercici per al lector.

281. A la demostració usem el resultat establert a Ei 1, quelcom totalment acceptable en el mètode deductiu d'Euclides, heretat dels ensenyaments platònics i, sobretot, aristotèlics.

282. Aquí Euclides usa el fet que la circumferència $\circ CGH$ talla el segment DF en un punt G, però l'existència d'aquest punt d'intersecció no s'ha explicitat en cap postulat ni en cap noció comuna.

283. Vegeu la nota 278 (pàgina 89).

284. Euclides dóna de forma explícita la manera de restar segments. Podria haver unificat criteris i plantejat les dues operacions de segments: la suma i la diferència. Vegeu Vitrac (1990), p. 200.

Siguin AB i C els dos segments donats,[285] amb AB més gran que C.[286]

Volem sostreure un segment igual a C, el curt, de [el segment] AB, el llarg.

[*Construcció.*] Al punt A, col·loquem —κεῖμαι— [el segment] AD igual al segment C. [Ei 2]

Tirem la circumferència $\bigcirc DEF$, amb centre a A i radi AD.[287] [P 3] ♣

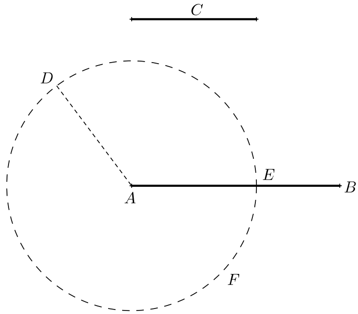


Figura Ei 3

[*Demostració.*] Ara, atès que el punt A és el centre del cercle $\bigcirc DEF$, [els segments] AE i AD són iguals. [D 15]

Però [, per construcció,] C també és igual a AD.

Aleshores, cada un dels segments AE, C és igual a [el segment] AD; d'això en resulta que [els segments] AE i C són iguals. [Nc 1]

I això és el que volíem demostrar.[288] ♠

Ei 4.[289] *Si dos triangles tenen dos costats iguals, respectivament,*[290] *i l'angle que contenen també té els costats iguals, aleshores aquests triangles tenen les bases* —βάσισ—[291] *iguals. A més, el triangle és igual al triangle i els altres angles són iguals als altres angles, respectivament, és a dir, els angles que subtendeixen* —ὑποτείνουσιν—[292] *costats iguals són iguals.*

285. Observem que, quan no necessita conèixer els extrems perquè no els ha de manipular, designa el segment amb una sola lletra.

286. S'accepta, doncs, la possibilitat de comparar segments i el fet que, donats dos segments diferents, l'un és més gran que l'altre.

287. Aquesta circumferència $\bigcirc(A, C)$ talla —si bé no s'ha donat cap principi que garanteixi l'existència del tall— el segment AB pel punt E.

288. Hem «portat» el segment C sobre el segment AB, a partir d'un extrem. El segment EB és el que queda un cop s'ha fet la sostracció. L'anomenarem el «residu» o «excés».

289. És el criteri CAC d'igualtat de triangles.

290. Euclides diu: ἑκατέρα. . . ἑκατερᾳ. Ho hem traduït, com és habitual, per «respectivament».

291. És la primera vegada que usa aquest terme.

292. Segons el DIEC, el verb «subtendir» —un terme clarament geo-

Siguin $\triangle ABC$ i $\triangle DEF$ dos triangles que tenen els dos costats AB i AC iguals als costats DE i DF [, respectivament]; és a dir, AB a DE i AC a DF, i l'angle $\widehat{BAC}$ igual a l'angle $\widehat{EDF}$.[293]

Afirmo[294] que la base BC també és igual a la base EF, i el triangle $\triangle ABC$ al $\triangle DEF$, i els altres angles, respectivament, als angles restants; és a dir, aquells que subtendeixen costats iguals; d'una banda, $\widehat{ABC}$ a $\widehat{DEF}$ i, d'una altra, $\widehat{ACB}$ igual a $\widehat{DFE}$.

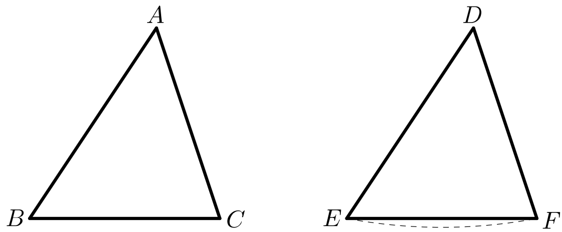


FIGURA EI 4

mètric— significa «Una recta, estendre's des d'un extrem a l'altre (d'un arc, d'una figura angular, etc.). *La corda que subtendeix un arc.*» Podríem dir, potser fóra més clar, «s'oposa», o sigui, «el segment que s'oposa a l'angle», però, atès que disposem d'un terme específic que s'ajusta al terme grec, l'usarem. Tanmateix, per tal que el text sigui sempre clar i simple ampliarem el significat de «subtendir». Si un segment subtendeix un angle, un arc, etc., direm, per extensió, que l'angle, l'arc, etc., subtendeix el segment. Pensem en els tres costats, angles i arcs que subtendeixen els angles d'un triangle [EIV 2]. D'aquesta consideració resulta que no entendrem el prefix «sub» com a 'estar a sota', que, en geometria, no té cap mena de sentit. Vegeu EI 19 (pàgina 112).

293. Euclides no precisa mai què entén per «angles iguals». Vegeu l'anàlisi del concepte d'angle a *Grècia III* i al text de Procle associat.

La notació per als angles és: τὴν ὑπο $BA\Gamma$ γωνια, que abreuja la forma completa d'acord amb la definició DI 8: ἡ ὑπώ τῶν BA,$A\Gamma$ περιεχομένην γωνία, «l'angle contingut pels (segments) BA, AC» (vegeu HEATH (1925), volum I, p. 249). Euclides, als llibres X, XI, XII i XIII, abreuja αἱ BA, $A\Gamma$ amb αἱ $BA\Gamma$. I hi ha casos en què parla de «segment trencat», quan els extrems de totes dues parts del segment trencat estan en llocs predeterminats, per exemple, en una circumferència, com a EIII 20. En aquesta traducció, usarem el barret, $\widehat{BAC}$, per a indicar els angles —el vèrtex de l'angle és la lletra del mig de l'expressió, A—, ja que de vegades Euclides usa tres lletres per a designar un segment rectilini. Vegeu EI 14.

294. Euclides usa λέγω, que hem traduït per «afirmo».

[*Demostració.*] Si apliquem —ἐφαρμόσειν—[295] el triangle $\triangle ABC$ al triangle $\triangle DEF$,

col·locant el punt A damunt el punt D i el costat AB sobre el costat DE,[296]

el punt B també coincideix amb el punt E perquè els costats AB i DE són iguals.[297]

Un cop aplicat [el costat] AB sobre [el costat] DE, el costat AC s'aplica sobre el costat DF perquè els angles $\widehat{BAC}$, $\widehat{EDF}$ són iguals.

I, de retruc, el punt C coincideix amb F perquè els costats AC i DF són iguals.

Per tant, la base BC coincideix amb la base EF

perquè, si es donés el cas que B coincidís amb E, i C amb F,

i que la base BC no coincidís amb la base EF,[298]

les dues bases tancarien un espai, i això no és possible. [Nc 9′][299]

Les bases BC i EF coincideixen i, per tant, són iguals. [Nc 4]

Aleshores, tot el triangle $\triangle ABC$ coincideix amb tot el triangle $\triangle DEF$ i, per tant, són iguals. [Nc 4]

I els angles restants també coincideixen amb els angles restants i, per tant, són iguals

l'angle $\widehat{ABC}$ a l'angle $\widehat{DEF}$ i l'angle $\widehat{ACB}$ a l'angle $\widehat{DFE}$. [Nc 4]

I això és el que volíem demostrar. ♠[300]

---

295. Usa el moviment, cosa que caldria evitar en geometria. Recordem que Giovanni Alfonso Borelli —Borelli (1658)— havia pres la precaució de dir: «facta intellectuali superpositione». Tenia, per tant, consciència de les precaucions que calia prendre. Finalment, veient la impossibilitat de demostrar-ho geomètricament, David Hilbert ho imposà com a axioma en el grup dels «axiomes de congruència», a Hilbert (1899), edició castellana, p. 13–32. Bertrand Russell, el 1910, ho expressà en la forma actual.

296. Usem l'expressió «costat» en lloc de «segment» quan es tracta de segments que delimiten un polígon.

297. S'admet: «El que és igual es superposa», recíproc de la Nc 4.

298. En el cas molt dubtós que aquest paràgraf fos original d'Euclides —vegeu el comentari de Vitrac (1990), volum i, nota 22, p. 201. És la primera proposició en la qual s'usa implícitament el «principi de reducció a l'absurd» que comentarem a Ei 6; la primera proposició en què, sense cap mena de dubte, s'usa explícitament.

299. Vegeu la nota 263 (pàgina 85).

300. Aquesta proposició, «en la qual sembla que manqui un procedi-

EI 5. *En els triangles isòsceles,*[301] *els angles de la base són iguals. I si els costats es prolonguen, els angles que es troben sota la base també són iguals entre si.*[302]

Sigui $\triangle ABC$ un triangle isòsceles en el qual els costats AB i AC són iguals.

Siguin els segments BD i CE prolongacions [respectives] dels costats AB i AC. [P 2]

Afirmo que els angles $\widehat{ABC}$ i $\widehat{ACB}$ són iguals, i els angles $\widehat{CBD}$ i $\widehat{BCE}$ també.

[*Demostració.*] Sigui F un punt arbitrari —τυχὸν σημεῖον τὸ—[303] del segment BD.

---

ment demostratiu propi» (MARCHINI (2006), p. 37), ha estat comentada de forma diversa. Així, a BUNT, JONES i BEDIENT (1976), edició del 1988, p. 154, llegim: «A la demostració d'EI 4, Euclides transporta un triangle. Quins són els fonaments d'aquest procediment?» I afegeixen que l'expressió «transportar» no és mencionada ni en les nocions comunes, ni en els postulats, una opinió amb la qual coincideix BOYER (1968), edició castellana, p. 148. En canvi, KLINE (1972), edició castellana, p. 93, sosté que el «transport» té el fonament en la Nc 4 (o Nc 7′), una opinió amb la qual estem d'acord. Tanmateix, el text de FRAJESE i MACCIONI (1970), p. 57, és molt clar:

> Per a reconèixer la igualtat —i, naturalment, la desigualtat— de segments, disposa del postulat tercer [...]. Quan desenvolupa aquest postulat, en les proposicions segona i tercera del llibre I, mostra què es pot fer i què no en el transport de segments. Per als angles, no estableix la igualtat per transport, sinó que es veu en la necessitat de recórrer a un transport mecànic en les proposicions 4 i 8 del llibre I.

Euclides usa també el moviment a EIII 24. I, a més, al llibre XI, en les definicions d'esfera, con i cilindre, però ho fa d'una manera totalment diferent: no pas com a transport (al pla), sinó com a gir a l'espai.

301. Podríem dir: «En tot triangle...», però aquest quantificador universal no és propi del pensament grec.

302. Aquest teorema és molt important des del vessant metodològic —alguns en dirien didàctic. És una proposició d'enunciat simple, de validesa evident. En canvi, la demostració corresponent posa de manifest la manera de procedir d'Euclides, que, si bé ja l'hem vista en les demostracions anteriors, ara pren una volada important. A més, tot, enunciat i demostració, és un bon exercici de lectura de textos clàssics.

303. Euclides diu «a cada punt F», que traduïm per «sigui F un punt arbitrari».

Al segment llarg AE hi sostraiem AG, igual al més curt AF. [Ei 3]

Unim FC i GB. [P 1]

Com que AF és igual a AG i AB a AC, els dos costats FA i AC [del triangle $\triangle\, FAC$] són iguals als dos costats GA i AB [del triangle $\triangle\, GAB$], respectivament.

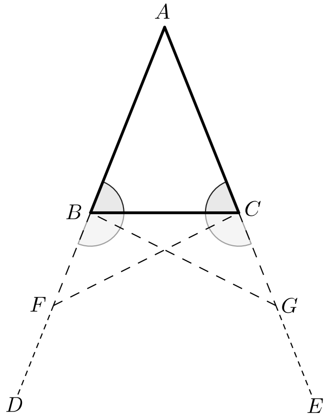


Figura Ei 5

I, a més, [tots dos triangles] tenen un angle comú: l'angle $\widehat{FAG}$.

Per tant, les bases FC i GB, i els triangles $\triangle\, AFC$ i $\triangle\, GAB$ són iguals, i també ho són els angles restants, els que subtendeixen costats iguals [dels triangles $\triangle\, FAC$ i $\triangle\, GBA$]. És a dir, els angles $\widehat{ACF}$ i $\widehat{AGB}$, i els angles $\widehat{AFC}$ i $\widehat{AGB}$ són iguals, respectivament. [Ei 4]

I, atès que els segments AF i AG, i [els subsegments] AB i AC són iguals, també ho són els romanents BF i CG. [Nc 3]

Però hem vist que els segments FC i GB són iguals;
per consegüent, els dos costats BF i FC són iguals als segments CG i GB [, respectivament,]
i l'angle $\widehat{BFC}$ ho és a l'angle $\widehat{CGB}$,
mentre que la base BC és comuna a tots dos.

Per tant, els triangles $\triangle\, BFC$ i $\triangle\, CGB$ són iguals. I els angles restants corresponents:[304] $\widehat{FBC}$ i $\widehat{GCB}$, $\widehat{BCF}$ i $\widehat{CBG}$. [Ei 4]

D'acord amb tot això, com que l'angle sencer $\widehat{ABG}$ és igual a l'angle sencer $\widehat{ACF}$,
els altres angles, $\widehat{ABC}$ i $\widehat{ACB}$, també ho són, [Nc 3]
i es troben a la base del triangle.

Però hem vist, a més, que els angles $\widehat{FBC}$ i $\widehat{GCB}$ —que es troben a sota de la base— són iguals.

I això és el que volíem demostrar.[305] ♠

---

304. «Els que subtendeixen costats iguals», una expressió que ometrem quan no hi hagi ambigüitat.

305. És interessant comparar aquesta demostració amb la que donarà

EI 6. *Si, en un triangle, dos angles són iguals entre si, els costats que subtendeixen també ho són.*[306]

Sigui $\triangle ABC$ un triangle en el qual els angles $\widehat{ABC}$ i $\widehat{ACB}$ són iguals.

Afirmo que els costats AB i AC també ho són.

[*Demostració.*] Si el costat AB és diferent del costat AC,[307]

Pappos molts segles més tard.

306. Dues observacions. La primera fa referència a l'equivalència entre tenir dos angles iguals i tenir dos costats iguals. La definició DI 20 caracteritza els triangles isòsceles com els triangles que tenen dos costats iguals. La proposició EI 5 estableix que també tenen dos angles iguals —els que subtendeixen els costats iguals. Ara, en canvi, Euclides afirma i demostra que si un triangle té dos angles iguals, és isòsceles, i que els costats iguals són, precisament, els que subtendeixen els angles iguals. Un exercici interessant seria canviar la DI 20 i considerar, com a definició, DI 20′: «Els triangles isòsceles són aquells que tenen dos angles iguals.» I veure si se'n pot deduir EI 6′: han de tenir també dos costats iguals, és a dir, si es pot arribar a la conclusió que totes dues són equivalents geomètricament considerades. És fàcil? Vegeu el problema 6 (pàgina 60).

La segona observació fa referència al fet que aquest és un teorema en el qual la demostració és «indirecta», és a dir, no es va del que es dóna al que es busca, sinó que s'accepta allò donat i «es suposa» que el que es busca és fals —és la «hipòtesi suplementària de l'absurd» o, simplement, la «hipòtesi de l'absurd». Finalment, s'arriba a contradicció. I, com que això mai no és acceptable, en resulta com a conseqüència que «no podem acceptar alhora» el que es dóna i la hipòtesi suplementària de l'absurd. Aquesta és, doncs, falsa i, per tant, la seva negació és certa —que és el que volíem provar. Aquesta manera de procedir es coneix com el «mètode per l'absurd», que ja vam trobar insinuada al filòsof Xenòcrates de Calcedònia, explícita a Aristòtil i, implícita, a EI 4. Actualment s'anomena «mètode de reducció a l'absurd». Al llibre I dels *Elements*, que és el que ara ens ocupa, Euclides l'usa en vuit ocasions.

Aquesta demostració posa de manifest que «les figures dels *Elements* són ideals» i estan pensades per a ajudar a la imaginació del lector, perquè, a vegades, són «falses», «impossibles». Vegeu PLA (2010), p. 56–57.

307. És la hipòtesi de l'absurd. Recordem-ho un altre cop, el darrer: suposem que els angles de la base $\widehat{ABC}$, $\widehat{ACB}$ són iguals i, alhora, acceptem una hipòtesi complementària, «que els costats AB, AC són diferents», que, de fet, és falsa. Suposem, doncs, que la figura adjunta, que compleix les

un és més llarg [que l'altre].[308]

Suposem que AB és més gran [que AC]
i sostraiem-hi [un segment] BD, igual al més curt AC. [Ei 3][309]

Unim [C i D] amb el segment CD.[310] [P 1]

Aleshores, com que DB i AC són iguals
i BC és comú,
els dos costats DB i BC són iguals als dos costats AC i CB [, respectivament,]
i l'angle $\widehat{DBC}$ ho és a l'angle $\widehat{ACB}$.

Per tant, les bases DC i AB, i els triangles $\triangle\, DBC$ i $\triangle\, ACB$ també ho són, [Ei 4]
el més petit i el més gran.[311] [Nc 5]

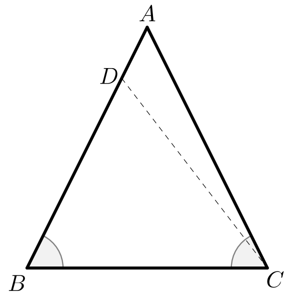


Figura Ei 6

Però això és absurd.

Per tant, atès que AB no és diferent de AC, són iguals.[312]
I això és el que volíem demostrar. ♠

Ei 7. *Donats dos segments que, col·locats damunt* [*els extrems*] *d'un segment donat, es tallen en un punt; no hi pot haver cap* —οὐ συσταθήσονται ἐπὶ—[313] *altra parella de segments iguals a aquests que, col·locats damunt* [*els extrems*] *i al mateix costat,*[314] *es tallin en un altre*

---

dues propietats alhora malgrat que sabem que són contradictòries, és possible. Es tracta, doncs, d'una figura «ideal».

308. Aquí Euclides usa la «llei de tricotomia» dels objectes geomètrics d'una mateixa naturalesa: «o són iguals o un és més gran, o més petit, que l'altre», i suposa que les tres possibilitats «s'exclouen entre si».

309. Per a seguir el raonament més clarament, és aconsellable considerar *dos* triangles separats: el triangle $\triangle\, ABC$ i el triangle $\triangle\, D'B'C'$, igual —superposable— al triangle $\triangle\, DBC$, i usar el triangle $\triangle\, D'B'C'$ on ell usa el triangle $\triangle\, DBC$. Vegeu Pla (2010), p. 56.

310. Euclides diu directament: «Considerem el segment CD», sobreentenent els punts que uneix, cosa que hem adoptat (nota 270, pàgina 88).

311. Aquí Euclides suposa que el triangle $\triangle\, DBC$, en estar inclòs dins el triangle $\triangle\, ACB$, és més petit que el triangle $\triangle\, ACB$.

312. Vegeu la segona part de la nota 308. Aquesta absurditat obliga a refusar la «hipòtesi de l'absurd» i acceptar el que volíem demostrar.

313. Significa «no podem construir-hi a sobre».

314. És la segona vegada que usa el terme «mateix costat» o «mateixa banda», sense que n'hagi aclarit abans el significat precís, amb independència del que mostra el dibuix, que, com hem dit abans, pot ser ideal.

punt [*diferent d'aquell en què ho han fet els primers*].[315]

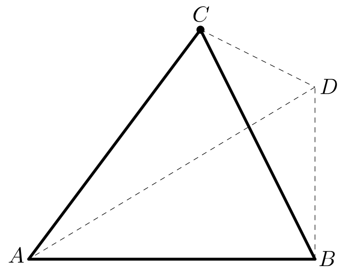


Figura Ei 7

[*Demostració.*] Perquè, si donats dos segments AC i CB col·locats sobre el costat AB i tallant-se al punt C,
n'hi ha més,[316]
hi ha dos segments més, DA i DB, iguals als dos anteriors,
col·locats sobre el mateix segment AB i al mateix costat,
que es tallen en un altre punt D.[317]

És a dir, els (segments) que tenen el mateix extrem són iguals.

O sigui, els segments CA i DA, que tenen en comú l'extrem A, són iguals, i els segments CB i DB, que tenen en comú l'extrem B, també.

Unim CD. [P 1]

Aleshores, com que [els costats] AC i AD són iguals,
els angles $\widehat{ACD}$ i $\widehat{ADC}$ també ho són. [Ei 5]

Per tant, l'angle $\widehat{ADC}$ és més gran que l'angle $\widehat{DCB}$.[318] [Nc 5]

---

315. És un enunciat una mica enrevessat. De fet, és un «lema» o un «element», segons els grecs (vegeu *Grècia III*), per a establir el criteri «ccc» d'igualtat de triangles —Ei 8—, o bé n'és —com veurem— un porisma. El que vol dir és: «Sobre un segment no podem posar-hi dos parells de segments iguals, respectivament, que facin dos triangles diferents, és a dir, que no tinguin el vèrtex i els costats comuns.»

Fixem-nos que, en aquesta proposició, malgrat la complicació de l'enunciat, no explicita, com ha fet en els casos anteriors, el significat més formalitzat —l'exposició i l'especificació— abans d'oferir-nos-en la demostració.

316. Hipòtesi de l'absurd.

317. Fixem-nos que Euclides dibuixa el punt D a fora del triangle $\triangle ACB$. Això és correcte? Ho és. Vegeu el problema 7 (pàgina 60).

318. Segons la figura, que és ideal, «està inclòs dins de». L'angle $\widehat{DCB}$ està inclòs dins l'angle $\widehat{DCA}$, que és igual a l'angle $\widehat{ADC}$. Per tant, l'angle $\widehat{DCB}$ és més gran que l'angle $\widehat{ADC}$ en el sentit que conté potencialment un angle congruent a l'angle $\widehat{ADC}$.

Aquí Euclides fa servir el principi de substitució —força natural—: si quelcom és més gran que una segona cosa i aquesta és igual a una tercera, aleshores la primera també és més gran que la tercera. De

En definitiva, l'angle $\widehat{CDB}$ és més gran que l'angle $\widehat{DCB}$.[319] [Nc 5]

Novament, com que CB i DB són iguals,
els angles $\widehat{CDB}$ i $\widehat{DCB}$ també ho són. [Ei 5]

Però havíem establert que [l'angle $\widehat{CDB}$] és més gran [que l'angle $\widehat{DCB}$], cosa que és impossible.
I això és el que volíem demostrar. ♠

Ei 8.[320] *Si dos triangles tenen dos costats i les bases iguals, aleshores també tenen iguals els angles continguts* —περειεχομένην—[321] *pels segments iguals.*[322]

Siguin $\triangle ABC$ i $\triangle DEF$ dos triangles que tinguin els dos costats AB i AC iguals als costats DE i DF [, respectivament];
és a dir, AB a DE, i AC a DF.

I també les bases BC i EF.

Afirmo que els angles $\widehat{BAC}$ i $\widehat{EDF}$ són iguals.

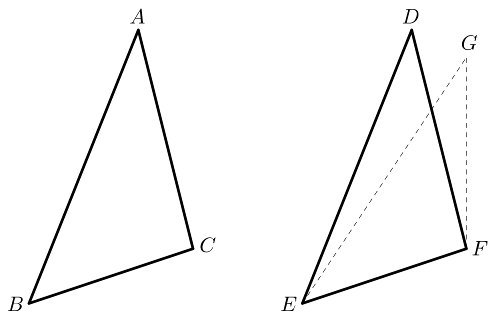


Figura Ei 8

[*Demostració.*] Perquè, si apliquem el triangle $\triangle BAC$ damunt el triangle $\triangle EDF$[323]
de manera que el punt B es col·loqui sobre el punt E i la recta BC sobre la recta EF,
el punt C coincideix amb el punt F, ja que BC i EF són iguals.[324]

---

fet, seria una noció comuna que no trobem ni entre les d'Euclides ni entre les afegides. Formalment, si $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ i $\mathfrak{A} > \mathfrak{G}$, aleshores $\mathfrak{B} > \mathfrak{G}$.

319. Aquí Euclides usa la transitivitat de la relació d'ordre. Formalment, si $\mathfrak{A} > \mathfrak{B}$ i $\mathfrak{B} > \mathfrak{G}$, aleshores $\mathfrak{A} > \mathfrak{G}$.

320. És el criteri ccc d'igualtat de triangles.

321. «Abraçats», participi del verb περιέχω, pels segments iguals.

322. Encara que és un porisma immediat d'Ei 7, Euclides necessita el moviment de triangles.

323. És a dir, portem un triangle damunt l'altre. De fet, traslllada la base damunt de la base i afirma que els triangles es superposen completament.

324. Novament recorre al recíproc de Nc 4.

Aleshores, BC coincideix amb EF, i BA i CA amb ED i DF.

Ja que, altrament,[325] atès que les bases BC i EF coincideixen,
si els costats BA i AC no ho fan amb els costats DE i DF sinó que se n'aparten, com ara EG i GF,
tenim dos segments donats, col·locats als extrems d'un segment donat, que es tallen en un punt,
i dos segments més donats, que es tallen en un altre punt, col·locats als extrems del mateix segment [que els dos primers],
amb la particularitat que totes dues parelles de segments són iguals [, respectivament].

Això no ho podem pas construir.[326] [Eɪ 7]

De tot plegat en resulta que si no és possible que, col·locant la base AB damunt la base EF, els costats BA i AC no coincideixin amb els costats ED i DF,
aleshores hauran de coincidir necessàriament.

És a dir, els angles $\widehat{BAC}$ i $\widehat{EDF}$ també coincideixen.

Per tant,[327] són iguals. [Nc 4]

I això és el que volíem demostrar. ♠

Eɪ 9. *Volem dimidiar* —διχα τεμεῖν—[328] *un angle rectilini donat.*[329]
Tenim l'angle rectilini[330] $\widehat{BAC}$,
i volem dimidiar-lo.

[*Construcció.*] Prenem un punt arbitrari D del [segment] AB.

Al segment AC, fem un segment AE igual al segment AD. [Eɪ 3]

325. Hipòtesi de l'absurd.

326. Hem adoptat una hipòtesi suplementària falsa que ens ha portat a una impossibilitat. No ho tornarem a repetir.
.»Tampoc no ho repetirem, però volem recordar-ho una vegada més. Euclides usa figures que són «falses» i, per tant, esquemes mentals per a ajudar a la comprensió de la demostració per l'absurd.

327. Recorre al recíproc de Nc 4. No ho tornarem a esmentar.

328. «Tallar en dos.» Usem el verb «dimidiar» per a indicar que quelcom «s'ha dividit per la meitat», tal com recull el DIEC (1995) a l'entrada corresponent.

329. Aquest problema obre la porta a la «trisecció de l'angle».

330. D'ara endavant, llevat que s'indiqui explícitament que són d'una altra naturalesa, entendrem que els angles són «rectilinis» perquè gairebé tots ho són.

Unim DE. [P 1]

Construïm el triangle equilàter $\triangle DEF$ de costat DE. [EI 1]

Unim AF. [P 1]

Afirmo que la recta AF dimidia l'angle $\widehat{BAC}$. ♣

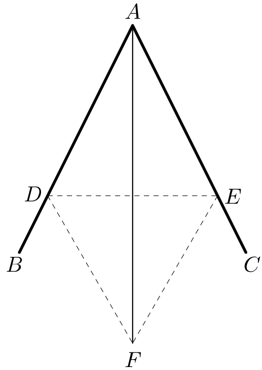


FIGURA EI 9

[*Demostració.*] Això és així perquè AD és igual a AE i AF és comú,
els dos costats DA i AF són iguals [als costats] EA i AF [, respectivament,]
i la base DF ho és a la base EF. [DI 20]

Els angles $\widehat{DAF}$ i $\widehat{EAF}$ són, doncs, iguals. [EI 8]

D'això en resulta que la recta AF dimidia l'angle [rectilini] $\widehat{BAC}$.
I això és el que volíem demostrar. ♠

EI 10. *Volem dimidiar un segment donat.*[331]

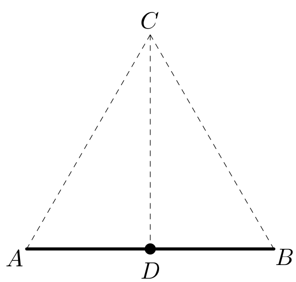


FIGURA EI 10

Sigui AB un segment donat[332]
i el volem dimidiar.

[*Construcció.*] Considerem el triangle equilàter $\triangle ABC$ de costat AB. [EI 1]

Dimidiem l'angle $\widehat{ACB}$ amb el segment CD. [EI 9]

Afirmo que el segment AB és dimidiat pel punt D.[333] ♣

[*Demostració.*] De resultes d'això que hem fet,
com que AC i CB són iguals, [DI 20]
i CD és comú,

331. A diferència del que passa en l'enunciat anterior, dividir un segment en tres o més parts iguals no representa cap mena de problema si s'accepta P 5, perquè, com podem veure a EVI 10, és un porisma del teorema de Tales EVI 2.

332. Curiosament, aquí Euclides diu: «una línia recta finita —πεπερασνένην—» («completa»), com si els casos anteriors no fossin segments finits.

333. Implícitament, s'accepta que la bisectriu CD talla el segment AB.

els costats AC i CD, i BC i CD són iguals [, respectivament,] i els angles $\widehat{ACD}$ i $\widehat{BCD}$ també.

Per tant, les bases AD i BD són iguals. [Ei 4]

En conseqüència, el punt D dimidia el segment AB.

I això és el que volíem demostrar. ♠

Ei 11. *Des d'un punt d'un segment volem tirar-hi una perpendicular.*[334]

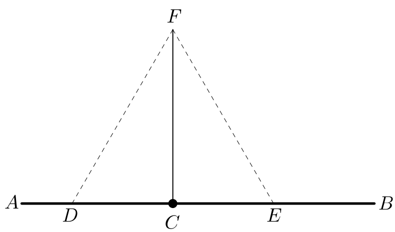


Figura Ei 11

Siguin AB un segment donat i C un punt del segment.[335]

Volem tirar un segment perpendicular al segment AB des del punt C.

[*Construcció.*] Prenem un punt arbitrari D —τυχὸν σημεῖον τὸ Δ—[336] del segment AB i agafem CE igual a CD.[337] [Ei 2 o 3][338]

Ara fem el triangle equilàter $\triangle FDE$. [Ei 1]

Unim FC. [P 1]

Afirmo que el segment FC és perpendicular al segment donat AB pel punt donat C. ♣

[*Demostració.*] Com que els costats DC i CE són iguals i CF és comú, els dos costats DC, CF i EC, CF són iguals [, respectivament,] i les bases DF i FE també. [Di 20]

Per tant, els angles $\widehat{DCF}$ i $\widehat{ECF}$ són iguals [Ei 8] i, a més, adjacents.

334. El text diu: «Des d'un punt d'un segment, tirem una recta que formi amb el segment angles rectes.» És força redundant, ja que, a Di 10 (pàgina 78), aquesta recta s'anomena «perpendicular».

335. Vegeu la nota 341 (pàgina 103).

336. «Un punt que es trobi a.» Com és habitual als textos matemàtics actuals, «un punt arbitrari». Hom sobreentén que és del segment AB. Vegeu la nota 341 (pàgina 103).

337. Usa el verb κείσθαι, com a Di 4 (pàgina 77). Vegeu Heath (1925), volum i, p. 269, o Vitrac (1990), p. 218, nota 71.

338. La proposició Ei 2 no afirma explícitament que puguem dur un subsegment sobre un segment amb un extrem comú. En canvi, Ei 3 sí.

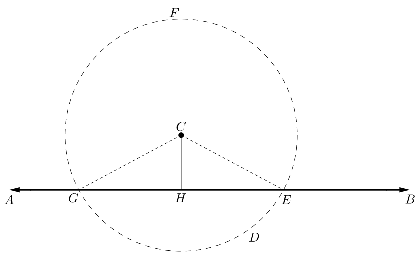
Però, quan un segment cau damunt un altre formant-hi angles adjacents iguals entre si, aquests angles són rectes. [Dɪ 10][339]

Per tant, els angles $\widehat{DCF}$ i $\widehat{ECF}$ són rectes.

D'això en resulta que la recta CF és una perpendicular al segment AB pel punt C. [Dɪ 10]

I això és el que volíem demostrar. ♠

Eɪ 12. *Des d'un punt donat que no pertanyi* —ὅ μή ἐστιν ἐπ΄ αὐτῆσ— *a una recta donada infinita* —εὐθεῖαν ἄπειρον—, *volem tirar-hi un segment perpendicular.*[340]



Fɪɢᴜʀᴀ Eɪ 12

Siguin AB una recta infinita i C un punt exterior.[341]

Volem tirar un segment perpendicular a la recta infinita AB des del punt exterior C.

[*Construcció.*] Considerem un punt arbitrari D a l'altre costat de la recta AB —ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη τῆς AB.[342]

339. Curiosament, Euclides recorda el text de la definició Dɪ 10.

340. En grec, diu: Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείον, ὅ μή ἐστιν ἐπ᾽ αὐτῆς, καθετον εὐθεῖα γραμμὴν ἀγαγεῖν. És un dels enunciats en els quals Euclides necessita usar el caràcter «infinit» de la línia recta. Per a què? Doncs, simplement, per a aconseguir que el punt donat es trobi per damunt la recta perquè la figura sigui general. En el cas d'un segment finit donat per endavant i d'un punt també donat per endavant, el punt podria estar a la dreta o a l'esquerra dels extrems del segment. Podem creure que P 2, en permetre prolongar un segment, ens permet fer-ho fins a aconseguir un segment prou llarg perquè el punt es trobi damunt —o sota— el segment; però, en cada cas, caldria fer-ne una prolongació *ad hoc*. L'enunciat permet a Euclides fer una demostració absolutament vàlida.

341. Si un punt «no és» en un segment o una línia infinita, diem que «és exterior». Tanmateix, Euclides no precisa els conceptes de «punt d'un segment» i «punt exterior a un segment» o «a una recta» en cap definició. Els deixa a la intuïció o al context gràfic de la figura que acompanya l'enunciat i la demostració.

342. «A l'altre costat de la recta AB» queda per a la intuïció o per a la interpretació de la figura. I aquí significa «a l'altre costat del punt C respecte de la recta AB».

Amb centre C i radi CD tirem la circumferència $\circ EFG$.[343] [P 3]

Ara dimidiem el segment EG per H. [EI, 10]

Unim CG, CH i CE.[344] [P 1]

Afirmo que s'ha tirat el segment CH perpendicular a la recta infinita donada des del punt C exterior a la recta AB. ♣

[*Demostració*.] Com que GH i HE són iguals, i HC és comú,
els costats GH i HC, i EH i HC són iguals [, respectivament,]
i les bases CG i CE també. [DI 15]

Per tant, els angles $\widehat{CHG}$ i $\widehat{EHC}$ també ho són. [EI 8]

I, a més, són adjacents.

Però, quan una recta [o segment rectilini] cau sobre una altra recta [o segment] fent angles iguals, aquests angles són rectes,
i la recta [o segment] que cau sobre l'altra s'anomena «perpendicular». [DI 10][345]

Per tant, resulta que hem tirat el segment CH perpendicular a la recta infinita donada AB des del punt exterior C.

I això és el que volíem demostrar. ♠

[**Incís al text 1.** Acabem d'establir [a EI 11 i 12] que, en tots dos casos, existeix la perpendicular. Ara bé, l'anomalia que planteja la proposició EI 31, que, al nostre entendre, s'hauria de substituir per EI 31′ (vegeu la nota 446, pàgina 129), fa que, per una qüestió d'analogia, sigui interessant analitzar la «unicitat» de la perpendicular a un segment tant *a*) des d'un punt exterior com *b*) des d'un punt del segment.

EI 11′ i 12′. *Per un punt C,* a) *exterior a una semirecta AB, o* b) *d'un segment $A'B'$, només podem tirar-hi una perpendicular.*

Afirmo que «només» n'existeix una.

[*Demostració*.] Suposem que existeix més d'un [segment] perpendicular, és a dir, que podem tirar dues perpendiculars,[346]

343. Suposem, òbviament, que talla la recta AB en dos punts, E i G.

344. És el primer problema que Euclides resol sense recórrer a un triangle equilàter.

345. Vegeu la nota 339 (pàgina 103).

346. És la hipòtesi de l'absurd.

CH i CH', en el cas a, i $C'F$ i $C'F'$, en el cas b (d'acord amb els ítems a i b de la figura Ei 11$'$).

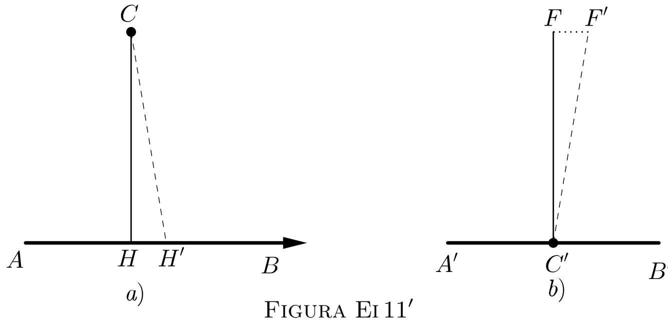


Figura Ei 11$'$

En el cas a, l'angle extern $\widehat{CH'B}$ del triangle $\triangle CHH'$ és més gran que l'angle intern oposat $\widehat{CHB}$, [Ei 16][347]
però, atès que CH i CH' són perpendiculars a AB, els angles $\widehat{CH'B}$ i $\widehat{CHB}$ són rectes.

I, per tant, iguals. [Di 10 i P 4]

Impossible!

En el cas b, unim FF' i raonem anàlogament al cas a. [P 1]

L'angle $\widehat{F'C'B'}$ és igual a l'angle $\widehat{FC'B'}$ menys l'angle $\widehat{FC'F'}$; per tant, l'angle $\widehat{F'C'B'}$ és, alhora, més petit i igual que l'angle $\widehat{FC'B'}$.

Impossible!

I això és el que volíem demostrar. ♠]

Ei 13. *Si un segment rectilini cau sobre un altre formant* [*dos*] *angles,* a) *tots dos angles són rectes, o* b) *junts*[348] *fan dos angles rectes.*[349]
Sigui AB un segment que cau sobre el segment DC determinant els angles $\widehat{CBA}$ i $\widehat{ABD}$.

347. O bé el triangle $\triangle CHH'$ té dos angles rectes. Impossible (Ei 17).

348. Afegirem l'expressió «junts» sempre que ens sembli necessari ferho per qüestions de claredat.

349. Aquesta proposició és bàsica per a establir Ei 15 (pàgina 108), la qual, de fet, n'és un simple porisma. És un teorema. És a dir, els objectes geomètrics estan donats i hem de «provar» que compleixen unes certes propietats. Ja no tornarem a fer aquesta observació. Els signes ♣ i ♠ ho indiquen ben clarament.

Afirmo que els angles $\widehat{CBA}$ i $\widehat{ABD}$ són rectes o que junts fan dos angles rectes.

[*Demostració.*] *a*) Si els angles $\widehat{CBA}$ i $\widehat{ABD}$ són iguals, aleshores cadascun és recte. [Di 10] ♠

b) En cas contrari,[350] considerem la perpendicular BE al segment CD pel punt B. [Ei 11]

Aleshores, els angles $\widehat{CBE}$ i $\widehat{EBD}$ són rectes. [Di 10]

I, com que l'angle $\widehat{CBE}$ és igual als dos angles $\widehat{CBA}$ i $\widehat{ABE}$ [junts], afegim a cadascun l'angle $\widehat{EBD}$.

Per tant, els angles $\widehat{CBE}$ i $\widehat{EBD}$ són iguals als tres angles $\widehat{CBA}$, $\widehat{ABE}$ i $\widehat{EBD}$. [Nc 2]

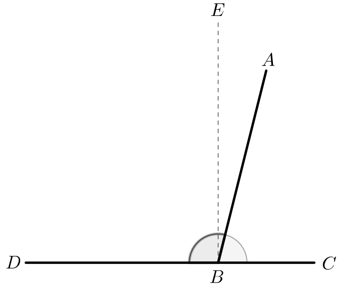


Figura Ei 13

I, com que l'angle $\widehat{DBA}$ és igual als angles $\widehat{DBE}$ i $\widehat{EBA}$ [junts], si afegim l'angle $\widehat{ABC}$ [a cadascun] —κοινὴ προσκείσθω ᾧη ὑπο *ΑΒΓ*—,

aleshores els angles $\widehat{DBA}$ i $\widehat{ABC}$ [junts] són iguals als angles $\widehat{DBE}$, $\widehat{EBA}$ i $\widehat{ABC}$ [junts]. [Nc 2]

Però hem provat que els angles $\widehat{CBE}$ i $\widehat{EBD}$ també són iguals a aquests tres angles.

Per tant, els angles $\widehat{CBE}$ i $\widehat{EBD}$ són iguals als angles $\widehat{DBA}$ i $\widehat{ABC}$. [Nc 1][351]

Però els angles $\widehat{CBE}$ i $\widehat{EBD}$ valen dos angles rectes.

En definitiva, doncs, els angles $\widehat{DBA}$ i $\widehat{ABC}$ junts també els valen.

I això és el que volíem demostrar. ♠

Ei 14. *Si dos segments, tirats en un punt d'un segment [donat]*[352] *però a costats diferents [del segment], formen, amb aquest segment, angles*

350. Aquesta demostració és interessant perquè és la primera en la qual Euclides fa «disjunció de casos»: hi ha dos casos excloents i cal analitzar què passa en cadascun. D'ací la disjuntiva de la conclusió de l'enunciat del teorema.

351. Vegeu la nota 278 (pàgina 89). No ho repetirem més.

352. Usa l'expressió μὴ ἐπὶ τὰ αὐτα μέρη. Pel que fa a les expressions «en un mateix costat», «a costats diferents» i «a cada costat», vegeu Vitrac (1990), volum i, p. 220, nota 75.

adjacents iguals a dos angles rectes, els dos segments formen un únic segment.[353]

Per l'extrem B del segment AB tirem dos segments BC i BD que no es trobin al mateix costat [de AB] i que formin angles adjacents $\widehat{ABC}, \widehat{ABD}$ iguals a dos angles rectes. [Ei 13]

Afirmo que els segments BD i CB estan alineats.

[*Demostració.*] Perquè si BD no està alineat amb CB,[354] el segment BE[355] ho ha d'estar amb [el segment] CB.[356] [P 2]

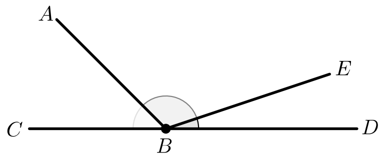


Figura Ei 14

Atès que el segment AB forma, amb el segment CBE,[357] els angles $\widehat{ABC}$ i $\widehat{ABE}$, aquests angles junts valen dos angles rectes. [Ei 13]

Per tant, els angles $\widehat{CBA}, \widehat{ABE}$ són iguals a $\widehat{CBA}, \widehat{ABD}$, respectivament. [P 4; Nc 1]

Podem sostreure l'angle $\widehat{CBA}$ de cadascuna de les parelles, i els angles que romanen, $\widehat{ABE}$ i $\widehat{ABD}$, són iguals. [Nc 3]

El petit [és igual] al gran. I això és impossible.[358] [Nc 5]

Per tant, BE no està alineat amb CB.

Anàlogament, ho podríem demostrar per a qualsevol altre segment diferent de BD.[359]

---

353. És una proposició que caracteritza l'«angle pla», un angle que no s'ha introduït en les definicions.

Procle comenta que la condició «pertànyer a costats diferents» és essencial, atès que si falla, hom pot donar un contraexemple, tal com va observar Porfiri. Vegeu el problema 13 (pàgina 62).

354. Hipòtesi de l'absurd.

355. Diferent del segment BD.

356. Fixem-nos novament —i per darrera vegada— en la «falsedat» del dibuix.

357. Aquí, atenció!: les tres lletres designen un segment i no pas un angle, per això no duen barret.

358. Clou el procés de reducció a l'absurd.

359. Aquesta consideració és força curiosa. Sembla que Euclides vol deixar clara la naturalesa arbitrària del segment BD més enllà del dibuix; d'altra banda, fals. Podria ser que el segment BE estigués sota el

Per tant, CB està alineat amb BD.

I això és el que volíem demostrar. ♠

Ei 15. *Quan dos segments es tallen formen angles verticals iguals.*[360]

Considerem que dos segments AB i CD es tallen al punt E.

Afirmo que l'angle $\widehat{AEC}$ és igual a l'angle $\widehat{DEB}$.

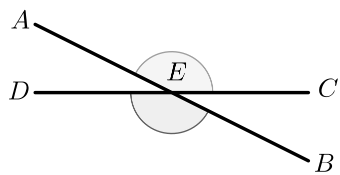


Figura Ei 15

[*Demostració*.] Atès que el segment AE cau sobre el segment CD —ἐπ᾽ εὐθεῖαν τὴν—[361] formant els angles $\widehat{CEA}$ i $\widehat{AED}$, aquests dos angles [junts] són iguals a dos angles rectes. [Ei 13]

Anàlogament, com que el segment DE cau sobre el segment AB formant els angles $\widehat{AED}$ i $\widehat{DEB}$, aquests dos angles [junts] són iguals a dos angles rectes. [Ei 13]

Però havíem provat que els angles $\widehat{CEA}$ i $\widehat{AED}$ també eren iguals a dos angles rectes.

D'això en resulta que les parelles d'angles $\widehat{CEA}$, $\widehat{AED}$ i $\widehat{AED}$, $\widehat{DEB}$ són iguals. [P 4; Nc 1, Nc 2 o Nc 5′][362]

Sostraiem ara l'angle $\widehat{AED}$ de cadascuna [de les unions].

Així doncs, els angles que resten, $\widehat{CEA}$ i $\widehat{DEB}$, són iguals. [Nc 3]

I provem, anàlogament, que els angles $\widehat{CEB}$ i $\widehat{DEA}$ són iguals.[363]

I això és el que volíem demostrar. ♠

---

segment BD, atès que és la prolongació del segment AB. Aleshores els angles petits i grans s'intercanviarien, però el fet que, essent diferents, fossin iguals, no ho faria.

No repetirem aquesta mena d'observacions perquè qualsevol lector atent les veu per si mateix.

360. Com diu Heath (1925), volum i, p. 278, nota 1: la diferència entre «angles adjacents» i «angles verticals» respon a l'ús de les expressions gregues ἐφεξῆς i κορυφῆς.

361. Literalment potser seria millor dir «és al damunt».

362. D'ara endavant, usarem Nc 2 en lloc de Nc 5′.

363. En aquest cas potser caldria dir que els «angles horitzontals» són iguals. D'ara endavant, si s'escau, els anomenarem «angles que s'oposen pel vèrtex», com és usual actualment.

Eɪ 15, porisma.[364] D'això en resulta evidentment que *si dos segments es tallen entre si, els angles que determinen al punt de secció* —πρὸς τῇ τομῇ—[365] *[junts] fan quatre angles rectes.*

Eɪ 16. *Si prolonguem un dels costats d'un triangle, l'angle extern* —ἐκτός γωνία— *és més gran que qualsevol dels interns* —ἐντός γωνία— *que s'hi oposen* —ἀπεναντίον.[366]

Sigui $\triangle ABC$ un triangle.

Prolonguem-hi un dels costats [, per exemple,] BC fins a D. [P 2]

Afirmo que l'angle extern $\widehat{ACD}$ és més gran que cada un dels angles interns $\widehat{CBA}$ i $\widehat{BAC}$.[367]

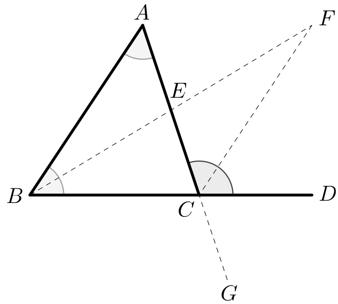


Figura Eɪ 16

[*Demostració.*] Dimidiem el segment AC per E. [Eɪ 10]

Unim BE i el prolonguem en un segment fins a [el punt] F,[368] [P 1 i 2] de manera que EF sigui igual a EB. [Eɪ 3]

Unim FC i prolonguem AC fins a G.[369] [P 1 i 2]

Aleshores, atès que AE i EC són iguals, i BE i EF també,

364. De fet, no és un «porisma» —πόρισμα— en el sentit que Euclides dóna a aquest terme a *Porismes*: «Una classe particular de proposicions independents que es troben entre un problema i un teorema.» Vegeu Pappos (1932), p. 485 (text B 3.2a_3 de *Grècia III*). És, simplement, un corollari que, segons Procle, és la base d'un dels resultats pitagòrics. Vegeu Pla (2016*c*), ítem *c*, p. 139 i 142. Probablement, és un enunciat apòcrif.

365. Ras i curt, diu: «a la secció».

366. Euclides omet les definicions d'«angle intern», «angle extern» i «angles oposats» d'un polígon.

367. És un altre teorema que per la «complicitat» amb els postulats, les nocions comunes i les proposicions ja demostrades i, alhora, per la «simplicitat i l'evidència dels passos», és molt aconsellable com a lectura d'un text clàssic. Permet algunes reflexions. Vegeu les notes 108 (pàgina 28) i 368.

368. Atenció! Euclides suposa —i així ho reflecteix el dibuix— que el punt F es troba a l'interior de l'angle $\widehat{ABC}$, és a dir, exclou la possible «torsió» dels segments rectilinis. Vegeu la nota 371 (pàgina 110).

369. Aquí, en lloc de fer servir ἐκβεβλήσθω, fa servir διήχθω.

els costats AE i EB [del triangle $\triangle\, AEB$] són iguals als costats CE i EF [del triangle $\triangle\, CEF$],
i els angles $\widehat{AEB}$ i $\widehat{FEC}$, que s'oposen pel vèrtex, són iguals.[370] [Ei 15]

D'això en resulta que les bases AB i FC són iguals
i, de retruc, els triangles $\triangle\, ABE$ i $\triangle\, CFE$ també.

I els altres angles [del primer triangle] ho són [, respectivament,] amb els altres angles [del segon triangle],
és a dir, els que subtendeixen costats iguals. [Ei 4]

En conseqüència, els angles $\widehat{BAE}$ i $\widehat{ECF}$ són iguals.

Però l'angle $\widehat{ECD}$ és més gran que l'angle $\widehat{ECF}$.[371] [Nc 5]

Per tant, l'angle $\widehat{ACD}$ és més gran que l'angle $\widehat{BAE}$.[372]

Anàlogament, si dimidiem BC, podem provar que l'angle $\widehat{BCG}$,
que és l'angle $\widehat{ACD}$, [Ei 15]
és més gran que l'angle $\widehat{ABC}$.
I això és el que volíem demostrar.[373] ♠

Ei 17. *En qualsevol triangle, dos angles qualssevol* [*junts*] —παντῃ μεταλαμβανόμεναι—[374] *són més petits que dos angles rectes.*[375]
Sigui $\triangle\, ABC$ un triangle.

370. Euclides escriu «per la seva verticalitat». Vegeu la nota 363 (pàgina 108).

371. Observació important! Euclides fa servir que el primer angle és «part» del segon i, per tant, més petit. Però, com ho sap, que «n'és part»? Ho sap perquè el punt F «cau» dins de l'angle $\widehat{ACD}$, extern al $\triangle\, BAC$. Però aquí entra en joc la torsió. El segment prolongat EF no podria tenir l'extrem F a l'altra banda del costat CD? Per què no? Vegeu Pla (2010), p. 60 i 61. Penseu en triangles d'una esfera —els seus costats són segments de circumferències màximes de la superfície de l'esfera. Pot esdevenir-se que el punt F no sigui dins de l'angle $\widehat{ACD}$?

372. Vegeu la nota 318 (pàgina 98).

373. Quin teorema més simple i alhora més elegant! Com ja hem indicat a la nota 367 (pàgina 109) és un bon fragment per a ser usat com a lectura d'un text clàssic.

374. Literalment: «presos junts de totes les maneres possibles».

375. És un porisma immediat de l'anterior. Només cal aplicar una noció comuna a la proposició anterior. Serveix també, com l'anterior, a la qual completa, com a lectura d'un text clàssic i per a veure que una proposició és un «element» d'una altra proposició posterior en el sentit descrit a *Grècia III*, o a Pla (2012), p. 48–51.

Afirmo que dos angles qualssevol del triangle $\triangle ABC$ junts fan menys de dos angles rectes.

[*Demostració.*] Prolonguem BC fins a D. [P 2]

Aleshores, com que l'angle $\widehat{ACD}$ és un angle extern al triangle $\triangle ABC$, és més gran que l'angle intern oposat $\widehat{ABC}$. [Ei 16]

Afegim l'angle $\widehat{ACB}$ a tots dos [angles].

Aleshores l'angle [suma] $\widehat{ACD}$ i $\widehat{ACB}$ és més gran que els angles $\widehat{ABC}$ i $\widehat{BCA}$ [junts]. [Nc 4′][376]

Però els angles $\widehat{ACD}$ i $\widehat{BCA}$ [junts] fan dos angles rectes. [Ei 13]

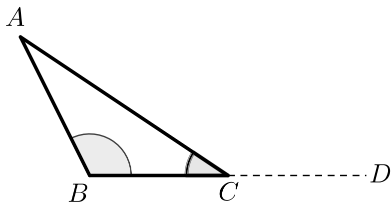


Figura Ei 17

Per tant, els angles $\widehat{ABC}$ i $\widehat{BCA}$ [junts] fan menys de dos angles rectes.

Anàlogament, podem veure que també ho fan els angles $\widehat{BAC}$ i $\widehat{ACB}$ [junts] i els angles $\widehat{CAB}$ i $\widehat{ABC}$ [junts].

I això és el que volíem demostrar. ♠

Ei 18. *En un triangle arbitrari, el costat més gran subtendeix l'angle més gran.*

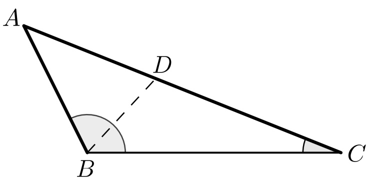


Figura Ei 18

Sigui $\triangle ABC$ un triangle en el qual el costat AC és més gran que el costat AB.

Afirmo que l'angle $\widehat{ABC}$ és més gran que el $\widehat{BCA}$.

[*Demostració.*] Com que AC és més gran que AB, fem AD igual a AB. [Ei 3]

Unim BD. [P 1]

Com que l'angle $\widehat{ADB}$ és un angle extern al triangle $\triangle BCD$, és més gran que l'angle intern oposat $\widehat{DCB}$. [Ei 16]

Però l'angle $\widehat{ADB}$ és igual a l'angle $\widehat{ABD}$, atès que el costat AB és igual al costat AD. [Ei 5]

376. Aquí Euclides usa indistintament les notacions $\widehat{ABC}$ i $\widehat{CBA}$ per a designar el mateix angle. Vegeu les notes 272 i 377 (pàgines 88 i 112, respectivament).

Per tant, l'angle $\widehat{ABD}$ també és més gran que l'angle $\widehat{ACB}$. [Nc 5]

En definitiva, l'angle $\widehat{ABC}$ és més gran que l'angle $\widehat{ACB}$.[377]

I això és el que volíem demostrar. ♠

Ei 19. *En un triangle arbitrari, l'angle més gran és el que subtendeix*[378] *el costat més gran.*

Sigui $\triangle\, ABC$ un triangle amb l'angle $\widehat{ABC}$ més gran que l'angle $\widehat{BCA}$.

Afirmo que el costat AC és més gran que el costat AB.

[*Demostració*.] Si no és així,[379]

[el costat] AC és a) igual a [el costat] AB, o b) més petit.[380]

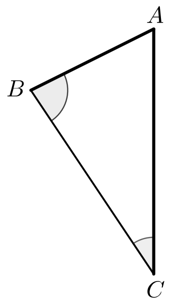


Figura Ei 19

a) Però AC no és igual a AB;[381]

ja que, [si són iguals,] els angles $\widehat{ABC}$ i $\widehat{ACB}$ també ho són, [Ei 5]

però [, per la hipòtesi de la proposició,] no ho són.[382]

En conseqüència, el costat AC és diferent del costat AB.[383]

Ara bé, b) AC no és més petit que AB,[384]

perquè, [si ho és,] l'angle $\widehat{ABC}$ també és més petit que l'angle $\widehat{ACB}$,[385] [Ei 18]

i no ho és [, perhipòtesi].

---

377. Euclides usa dues notacions diferents, $\widehat{ACB}$ i $\widehat{DCB}$, per a referir-se a un mateix angle, aquell que determinen els segments BC i CD, i alhora (el segment) BC i la prolongació CA de (el segment) CD. A més, a la demostració, té en compte que l'angle $\widehat{ABC}$ és més gran que l'angle $\widehat{ABD}$ [Nc 5] i la transitivitat de la desigualtat (nota 319, pàgina 99).

378. Vegeu la nota 292 (pàgina 91).

379. Hipòtesi de l'absurd. Procle (1970), § 319, edició anglesa, p. 249–250, i edició francesa, p. 273–274, n'ofereix una demostració directa. Vegeu Heath (1925), p. 285–286.

380. Vegeu la nota 308 (pàgina 97). Ja no la tornarem a esmentar.

381. Hipòtesi de l'absurd.

382. Vegeu com juga amb les dues hipòtesis: la bona i la de l'absurd.

383. Usem «diferent» allà on Euclides diu: «no igual».

384. Hipòtesi de l'absurd.

385. Aquesta és una tècnica força corrent a l'hora de provar els recíprocs dels teoremes. Primer, es demostra el teorema directe i, després, s'usa a la demostració per l'absurd per a obtenir precisament l'absurd.

Per tant, AC no és més petit que AB.

Però hem vist que tots dos tampoc són iguals.

Per tant, AC és més gran que AB.

I això és el que volíem demostrar.[386] ♠

EI 20. *En un triangle arbitrari, dos costats junts són sempre més grans que el tercer.*[387]

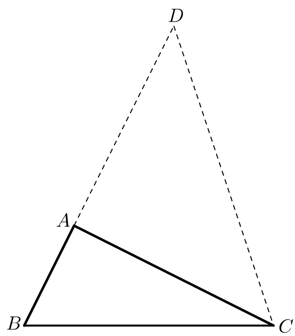


FIGURA EI 20

Sigui $\triangle\, ABC$ un triangle.

Afirmo que, al triangle $\triangle\, ABC$, dos costats qualssevol junts són més grans que l'altre. És a dir,

BA i AC [junts] són més grans que BC;
AB i BC [junts] són més grans que AC;
i BC i CA [junts] són més grans que AB.

[*Demostració.*] Prolonguem la recta AB fins al punt D, [P 2]

amb DA igual a CA. [EI 2]

---

386. Fixem-nos en la forma un xic barroca de la demostració.

387. Tenim la «desigualtat triangular», una propietat bàsica en qualsevol mètrica.

Apliquem aquesta proposició a la situació següent: «Tenim dues circumferències de centres i radis respectius O, r i O', r'. Suposem que totes dues circumferències es tallen en un punt A. Aleshores tenim el triangle $\triangle\, OAO'$.» Aquesta proposició estableix que el costat OO' és, necessàriament, més curt que els segments $OA, O'A$ junts.

La proposició esdevé, doncs, un diorisma, una condició necessària per tal que una certa construcció sigui possible (vegeu PLA (2016*c*), p. 271–273 i el concepte de diorisma a *Grècia III*); en concret, perquè dues circumferències es tallin. «Perquè dues circumferències es puguin tallar, el segment OO' que separa els centres —la «distància»— ha de ser més curt que els dos radis r, r' junts», perquè si es tallen hi haurà un punt A comú a totes dues circumferències, de manera que $r := OA$ i $r' := O'A$, i els tres punts O, O' i A formaran el triangle OAO'.

Això no evita que, per a poder garantir que totes dues circumferències es tallin a EI 1 (pàgina 86), s'hagi d'imposar un postulat que ho justifiqui, perquè no és possible recórrer a aquest resultat, que en depèn seqüencialment, com mostra (malgrat que no les contingui totes) la successió d'implicacions següent: EI 20 $\Leftarrow$ EI 5 $\Leftarrow$ EI 3 $\Leftarrow$ EI 2 $\Leftarrow$ EI 1. Vegeu, tanmateix, VITRAC (1990), p. 196.

Unim DC. [P 1]

Com que [el segment] DA és igual al [segment] AC,
els angles $\widehat{ADC}$ i $\widehat{ACD}$ són iguals. [Ei 5]

Per tant, l'angle $\widehat{BCD}$ és més gran que l'angle $\widehat{ADC}$. [Nc 5]

I, atès que $\triangle DCB$ és un triangle que té l'angle $\widehat{BCD}$ més gran que l'angle $\widehat{BDC}$,
i l'angle més gran subtendeix el costat més gran, [Ei 19]
BD és més gran que BC.

Però DA és igual a AC.

En conseqüència, BA i AC [junts] són més grans que BC. [Nc 4′]

Anàlogament, podem establir que AB i BC [junts] són més grans que CA, i BC i CA [junts] que AB.

I això és el que volíem demostrar. ♠

Ei 21. *Si des d'un punt de l'interior d'un triangle tirem dos segments a dos dels vèrtexs,*[388] a) *el segment trencat que formen és més curt que el segment trencat que formen els dos costats* [*no determinats pels vèrtexs elegits*], *però* b) *tots dos determinen un angle més gran.*[389]

Pels extrems B i C del costat BC
—que és un dels costats del triangle $\triangle ABC$—
tirem dos segments BD i DC que es tallen dins —ἐντόσ— del triangle.

Afirmo que *a*) [els dos costats] BD, DC [junts] són més petits que els dos costats BA, AC [junts] del triangle $\triangle ABC$,
però que *b*) formen un angle $\widehat{BDC}$ més gran que l'angle $\widehat{BAC}$.

---

388. Aquesta hipòtesi és necessària. Vegeu Heath (1925), p. 289–290.

389. Volem indicar que no és una traducció de l'enunciat euclidià, sinó una relectura que ens sembla menys abstrusa. Això no obstant, la part explicativa que fa Euclides abans de la demostració o de la construcció aclareix qualsevol ambigüitat.

El text diu: «Si dels extrems d'un dels costats d'un triangle ixen dos segments [interns al triangle] que es tallen en un punt de l'interior del triangle, aleshores el segment [trencat] que formen és més curt que el que formen els altres dos costats però l'angle és més gran.» L'expressió «es tallen» no apareix al text grec, que diu ἐντός συσταθῶσιν. Vegeu Heath (1925), volum i, p. 287, nota 2.

[*Demostració.*]

a) Prolonguem BD fins a F.[390] [P 2]

Del fet que, en qualsevol triangle, dos costats són més grans que l'altre, [Ei 20]

en resulta que, al triangle $\triangle\, ABF$, els costats AB i AF són més grans que BF.

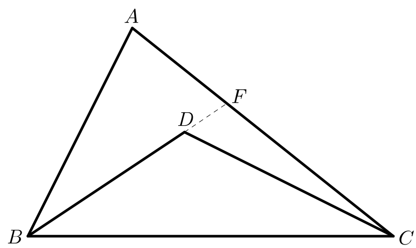


Figura Ei 21

Afegim FC a cadascun.

Aleshores BA, AC és més gran que BF, FC. [Nc 4′]

Novament, com que, al triangle $\triangle\, CFD$,

els dos costats CF i FD [junts] són més grans que CD, [Ei 20]

si afegim DB a cadascun,

resulta que CF, FB [junts] és més gran que CD, DB [junts]. [Nc 4′]

Però hem vist[391] que BA, AC [junts] és més gran que BF, FC [junts].

Per tant, BA, AC [junts] és més gran que BD, DC [junts].[392] ♠

b) Ara bé, en qualsevol triangle, l'angle extern és més gran que cadascun dels angles interns oposats. [Ei 16]

Així, al triangle $\triangle\, CDF$, l'angle extern $\widehat{BDC}$ és més gran que l'angle $\widehat{CFD}$.

Per la mateixa raó, al triangle $\triangle\, ABF$, l'angle extern $\widehat{CFB}$ és més gran que l'angle $\widehat{BAC}$. [Ei 16]

Però hem vist que l'angle $\widehat{BDC}$ és més gran que l'angle $\widehat{CFB}$.[393]

Per tant, l'angle $\widehat{BDC}$ és més gran que l'angle $\widehat{BAC}$. ♠

I això és el que volíem demostrar. ♠

390. Se'ns planteja la qüestió de la possibilitat de «garantir» que la prolongació tallarà, necessàriament, el costat AC del triangle $\triangle\, BAC$. Vegeu la nota 108 (pàgina 28).

391. Fem servir «hem vist» en lloc d'«hem provat» sobretot quan el fet s'acaba d'establir —de veure— dins de la mateixa demostració.

392. Aquí Euclides recorre, implícitament, a la transitivitat de la desigualtat «més gran que». Vegeu la nota 319 (pàgina 99).

393. S'usen dues expressions, $\widehat{CFD}$ i $\widehat{CFB}$, per a designar un mateix angle. Vegeu la nota 377 (pàgina 112).

Ei 22. *Volem construir un triangle que tingui els costats iguals [junts] a tres (segments) donats. Cal que dos costats qualssevol siguin més grans que l'altre [atès que, en tot triangle, dos costats han de superar el tercer].*[394]

Siguin A, B i C tres segments donats[395] dos dels quals [junts] són més grans que el tercer; és a dir,

A i B [junts] són més grans que C,
A i C [junts] són més grans que B,
i B i C [junts] són més grans que A.

Es tracta de fer un triangle de costats iguals als segments A, B i C.

[*Construcció.*] Considerem una línia recta DE[396] limitada, per un costat, per un punt D,[397] i il·limitada pel costat del punt E.[398]

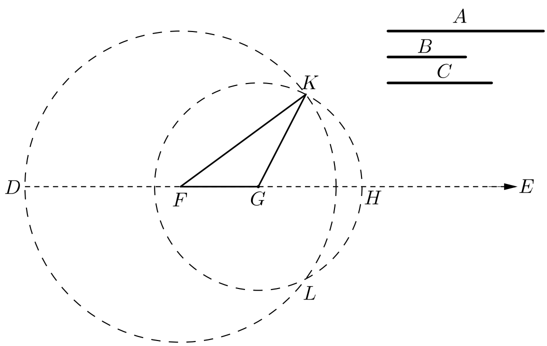


Figura Ei 22

Fem ara DF igual a A, FG igual a B, i GH igual a C. [Ei 3]

394. Euclides menciona explícitament el diorisma necessari perquè el problema tingui solució —que imposa la proposició Ei 20. Vegeu la nota 387 (pàgina 113).

395. Pel que fa a la notació, vegeu la nota 285 (pàgina 91). Ja no ho tornarem a mencionar.

396. Recordem que, per nosaltres, el terme «línia recta» significa 'il·limitada'.

397. Aquí veiem clarament que els extrems de les línies són punts.

398. És un altre cas en el qual Euclides imposa a la recta que usa —en aquest cas una semirecta— que sigui il·limitada i, per tant, que no tingui un dels dos extrems. Per què ho fa? Doncs perquè desconeix com són, de llargs, els segments donats i desitja abraçar tots els casos possibles amb una demostració única.

Amb centre a F i radi FD,[399] tirem la circumferència $\bigcirc DKL$. [P 3]

De bell nou, amb centre a G i radi GH, tirem la circumferència $\bigcirc KLH$. [P 3]

Unim KF i KG. [P 1]

Afirmo que el triangle $\triangle KFG$ s'ha construït amb tres segments iguals [als segments] A, B, C. ♣

[*Demostració.*] El punt F és el centre de la circumferència $\bigcirc DKL$; per tant, [els segments] FD i FK són iguals. [Dɪ 15]

Però FD és igual a A. Per tant, FK també ho és. [Nc 1]

Novament, el punt G és el centre de la circumferència $\bigcirc LKH$; per tant, [els segments] GH i GK són iguals. [Dɪ 15]

Però GH és igual a C. Per tant, KG és igual a C.[400] [Nc 1]

I [, per construcció, el segment] FG és igual a [el segment] B.

Per consegüent, els tres segments KF, FG i GK són iguals als tres segments A, B i C.

En definitiva, amb els tres segments KF, FG i GK, que són iguals als tres segments donats A, B i C, hem construït el triangle $\triangle KFG$.[401]

I això és el que volíem demostrar. ♠

Eɪ 23. *Sobre un segment donat i en un punt donat del segment, volem construir-hi un angle* [*rectilini*] *igual a un angle* [*rectilini*] *donat.*[402]

Siguin AB el segment, A el punt del segment i $\widehat{DCE}$ l'angle.

Volem construir, sobre el segment AB [que serà un dels costats de l'angle] i amb el punt A [com a vèrtex], un angle igual a l'angle donat $\widehat{DCE}$.[403]

---

399. Diu: διστήματι δὲ τῷ $Z\Delta$, «distància FD», que traduïm com a «radi FD».

400. És curiós observar —ja ho hem vist abans— que no respecta l'ordre dels extrems a l'hora d'anomenar els segments. Diu GK i KG. Vegeu la nota 272 (pàgina 88). No ho repetirem més.

401. En aquesta demostració, cal que l'existència del punt K quedi garantida. Vegeu la nota 387 (pàgina 113).

402. Si no hi ha ambigüitat no cal especificar el caràcter rectilini de l'angle. Com vàrem veure a Pʟᴀ (2016*c*), p. 226–227, segons Eudem, hem d'atribuir aquest teorema a Œnòpides de Quios.

403. Quan ens ha semblat adient per a clarificar el text, hem afegit paraules o expressions entre claudàtors. Sovint, però, com ara, l'explicació

[*Construcció.*] Considerem, sobre els segments CD i CE, els punts arbitraris D i E.[404]

Unim DE. [P 1]

Amb els tres segments iguals als tres segments CD, DE i EC, podem construir un triangle $\triangle AFG$,

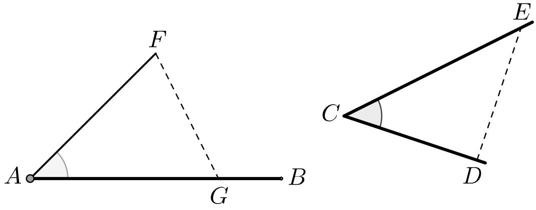


FIGURA EI 23

que tingui AF igual a CD, AG a CE, i FG a DE. [EI 22][405] ♣

[*Demostració.*] Com que els dos costats DC i CE són iguals als dos costats FA i AG [, respectivament,] i la base DE a la base FG, els triangles $\triangle DCE, \triangle FAG$ són iguals, [EI 8]
i, de retruc, els angles $\widehat{DCE}$ i $\widehat{FAG}$ també ho són.[406] [EI 8]

Per tant, sobre el segment AB i [amb el vèrtex] al punt A del segment, s'ha construït l'angle $\widehat{FAG}$, que és igual a l'angle $\widehat{DCE}$.
I això és el que volíem demostrar. ♠

EI 24. *Si dos triangles tenen dos costats iguals a dos costats, però en un, l'angle que contenen els costats és més gran que el que contenen*

---

del text és claríssima.

404. Si se'ns dóna un angle que té un vèrtex i dos costats, sempre podem considerar, en cada un dels costats, un punt diferent del vèrtex, ja que, altrament, els costats només tindrien un punt. I Euclides suposa que un segment té, almenys, dos punts; cosa que complementa el postulat P 1.

405. Segons EI 22, per a fer-ho, cal que la recta AB sigui il·limitada, però la que s'ofereix ara és un segment. Aquesta situació, per tant, no és exactament la que es dóna en la proposició anterior. De fet, donat un punt, A, i un segment, CE, sempre és possible fer una circumferència que tingui A com a centre i CE com a radi [EI 2] —i amb això n'hi ha prou perquè la circumferència talli el segment AB o la seva prolongació al punt G. HEATH (1925), p. 295, ofereix una demostració anàloga a la d'EI 22, usant una semirecta. Ens sembla, tanmateix, que Euclides evita les rectes i semirectes il·limitades sempre que pot. Fixem-nos que no cal que AB sigui una recta il·limitada, perquè podem determinar el punt E del costat EC de l'angle $\widehat{DCE}$ de manera que CE sigui més curt que AB [EI 1 i EI 2].

406. Segons MUELLER (1981), p. 23, és possible evitar EI 8. Vegeu VITRAC (1990), volum I, p. 240.

els [costats corresponents] de l'altre, aleshores el primer també té la base més gran.

Siguin $\triangle ABC$ i $\triangle DEF$ dos triangles amb els costats AB i AC iguals als costats DE i DF, respectivament,
és a dir, AB igual a DE, i AC igual a DF,
i l'angle a [el vèrtex] A més gran que l'angle a [el vèrtex] D.[407]

Afirmo que la base BC és més gran que la base EF.[408]

[*Demostració*.] Com que l'angle $\widehat{BAC}$ és més gran que l'angle $\widehat{EDF}$, podem construir, sobre el costat DE i a partir del punt D, l'angle $\widehat{EDG}$ igual a l'angle $\widehat{BAC}$. [Ei 23]

Agafem DG igual a un dels altres dos costats iguals, AC i DF, [Ei 3] i unim EG i FG.[409] [P 1]

Aleshores, com que AB i DE són iguals, i AC ho és a DG, els costats BA, AC són iguals als costats ED, DG, respectivament.

I els angles $\widehat{BAC}$ i $\widehat{EDG}$, també ho són.

Per tant, les bases BC i EG són iguals. [Ei 4]

I, com que [els costats] DF i DG [del triangle $\triangle GDF$] són iguals, els angles $\widehat{DGF}$ i $\widehat{DFG}$ també ho són. [Ei 5]

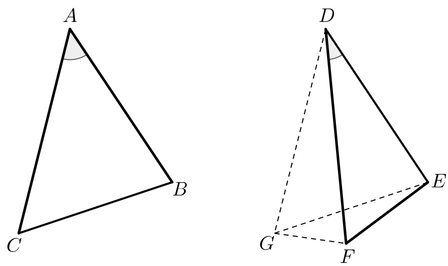


Figura Ei 24

Per tant, l'angle $\widehat{DFG}$ és més gran que l'angle $\widehat{EGF}$.[410] [Nc 1 i 5]

I, com que el triangle $\triangle EFG$ té l'angle $\widehat{EFG}$ més gran que l'angle $\widehat{EGF}$, [Nc 1 i 5]

---

407. Aquí usa l'expressió «angle a A» —ἡ δὲ πρὸς τῷ α γωνία A—, on A indica el vèrtex, en lloc d'usar tres lletres com fins ara.

408. Euclides fabrica un triangle $\triangle EGF$ que té dos costats, l'un igual a [el segment] BC i l'altre igual a [el segment] EF. Vol veure que el segon és més gran que el primer i, a la demostració, ho aconsegueix analitzant els angles que subtendeixen aquests segments.

409. Aquí Euclides ha construït el triangle que necessita.

410. El «principi de substitució» garanteix que si substituïm iguals per iguals, les relacions d'igualtat i de desigualtat es mantenen.

el costat que subtendeix l'angle més gran és més gran; [Ei 19]
o sigui, el costat EG és més gran que el costat EF.

Però EG és igual a BC.

Per tant, BC també és més gran que EF.[411]

I això és el que volíem demostrar. ♠

Ei 25. *Si dos triangles tenen dos costats iguals a dos costats però un té la base més gran que l'altre, aleshores l'angle que determinen els dos costats del que té* [*la base més gran*] *és més gran que l'angle que determinen els costats iguals corresponents de l'altre* [*amb la base més petita*].

Siguin $\triangle\, ABC$ i $\triangle\, DEF$ els dos triangles amb els costats AB i AC iguals als costats DE i DF, és a dir, AB a DE, i AC a DF.

I sigui la base BC més gran que la base EF.

Afirmo que l'angle $\widehat{BAC}$ és més gran que l'angle $\widehat{EDF}$.

[*Demostració.*] Si no és així,[412] o bé a) és igual, o bé b) és més petit.

a) Ara bé, l'angle $\widehat{BAC}$ no és igual a l'angle $\widehat{EDF}$,[413]
ja que si ho fos, la base BC seria igual a la base EF, [Ei 4]
però no ho és.

Per tant, l'angle $\widehat{BAC}$ no és igual a l'angle $\widehat{EDF}$.

b) Però l'angle $\widehat{BAC}$ tampoc no és més petit que l'angle $\widehat{EDF}$,[414]
perquè [si ho fos] aleshores la base BC seria més petita que la base EF, [Ei 24]
i no ho és.

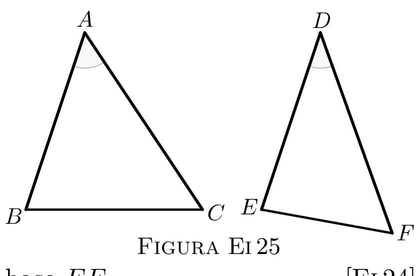


Figura Ei 25

En conseqüència, l'angle $\widehat{BAC}$ no és més petit que l'angle $\widehat{EDF}$.

Però hem vist que aquests dos angles tampoc són iguals.

En definitiva, doncs, l'angle $\widehat{BAC}$ és més gran que l'angle $\widehat{EDF}$.

I això és el que volíem demostrar. ♠

411. Vegeu la nota 410 (pàgina 119).
412. Hipòtesi de l'absurd.
413. Hipòtesi de l'absurd. No cal; es pot fer un raonament directe.
414. Hipòtesi de l'absurd. No cal; es pot fer un raonament directe.

EI 26. *Si dos triangles tenen dos angles iguals a dos angles i un costat igual a un costat, i tant se val que* a) *sigui el que sustenta els dos angles* —πλευρὰν τὴν πρὸς ταῖς ἴσαι γωνίαις— *com que* b) *sigui un dels que subtendeix un dels angles iguals* —τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίας τῶν ἴσων γωνιῶν—, *aleshores [els dos triangles] també tenen iguals els costats que resten, i l'angle restant igual a l'angle restant.*[415]

Siguin $\triangle ABC$ i $\triangle DEF$ els dos triangles amb els dos angles $\widehat{ABC}$ i $\widehat{BCA}$ iguals als dos angles $\widehat{DEF}$ i $\widehat{EFD}$ [, respectivament,]
és a dir, els angles $\widehat{ABC}$ i $\widehat{DEF}$ són iguals, i els angles $\widehat{BCA}$ i $\widehat{EFD}$ també ho són.

A més, [tots dos triangles] tenen un costat igual a un costat.

a) En primer lloc, els costats que sostenen tots dos angles,
o sigui, BC i EF, són iguals.[416]

Afirmo que els costats que resten són iguals [, respectivament]; és a dir, AB igual a DE, i AC a DF,
i els angles que queden, $\widehat{BAC}$ i $\widehat{EDF}$, també ho són.

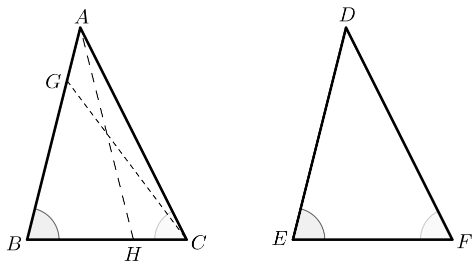


FIGURA EI 26

[*Demostració.*] Perquè si AB és diferent de DE,[417] un dels segments és més gran que l'altre.

Suposem que AB és el [costat] més gran i considerem [el segment] BG igual a DE. [EI 3]

Unim GC. [P 1]

---

415. Fixem-nos que, de fet, hi ha dos teoremes en un sol enunciat.

Es tracta del criteri ACA d'igualtat de triangles. En aquest cas, a diferència del que ha fet en les demostracions dels altres dos criteris d'igualtat, Euclides ja no usa la superposició i, per tant, evita el moviment de triangles.

Procle atribueix aquest resultat a Tales i diu que li servia per a determinar la distància d'un vaixell a la costa. Vegeu PLA (2016*c*), p. 71 i 76–77, i el text A 5.2.4*c*, p. 381.

416. Aquí considera un dels casos de l'enunciat.

417. Hipòtesi de l'absurd.

Aleshores, com que BG i DE són iguals, i BC i EF també,
els dos costats GB i BC són iguals als dos costats DE i EF,
i l'angle $\widehat{GBC}$ ho és a l'angle $\widehat{DEF}$.

Per tant, les bases GC i DF, els triangles $\triangle\, GBC$ i $\triangle\, DEF$,
i els angles restants, és a dir, els que subtendeixen costats iguals són iguals [, respectivament]. [EI 4]

En definitiva, l'angle $\widehat{GCB}$ és igual a l'angle $\widehat{DFE}$.

Però, per hipòtesi —ὑπόκειται ἴση—,[418] l'angle $\widehat{DFE}$ és igual a l'angle $\widehat{BCA}$. [Nc 1]

Per tant, l'angle $\widehat{BCG}$ és igual a l'angle $\widehat{BCA}$, el més petit ho és al més gran. [Nc 5]

I això és impossible.

En conseqüència, AB no és diferent de DE, o sigui, tots dos segments són iguals.

Però BC també és igual a EF;
per tant, els dos costats AB i BC són iguals als dos costats DE i EF,
i l'angle $\widehat{ABC}$ a l'angle $\widehat{DEF}$.

En conseqüència, les bases AC i DF, i els angles restants $\widehat{BAC}$ i $\widehat{EDF}$ són iguals. [EI 4] ♠

b) De bell nou, els costats que subtendeixen angles iguals són iguals, com ara AB i DE.

Afirmo novament que els costats restants són iguals, respectivament,
és a dir, AC i DF, i BC i EF. A més, els angles restants $\widehat{BAC}$ i $\widehat{EDF}$ també ho són.

Perquè si BC és diferent de EF,[419] un és més gran que l'altre.

Si BC és el més gran, fem BH igual a EF, [EI 3]
i unim AH. [P 1]

Aleshores, com que BH i EF són iguals, AB i DE també ho són.

I els dos costats AB i BH són iguals als dos costats DE i EF,
i contenen angles iguals.

Per tant, les bases AH i DF, els triangles $\triangle\, ABH$ i $\triangle\, DEF$,

418. És la primera vegada que usa explícitament l'expressió «per hipòtesi» per a referir-se a un fet que s'imposa dins l'enunciat.

419. Hipòtesi de l'absurd.

i els angles restants —és a dir, els que subtendeixen costats iguals— són iguals [, respectivament]. [EI 4]

Per tant, els angles $\widehat{BHA}$ i $\widehat{EFD}$ són iguals.

Però els angles $\widehat{EFD}$ i $\widehat{BCA}$ són iguals;[420]
per tant, al triangle $\triangle\, AHC$, l'angle extern $\widehat{BHA}$ és igual a l'angle intern oposat $\widehat{BCA}$. [EI 16; Nc 1]

I això és impossible.

En conseqüència, BC no és diferent de EF, o sigui, tots dos són iguals.

Però AB també és igual a DE.

Per tant, els dos costats AB i BC són iguals als dos costats DE i EF, i contenen angles iguals.

En definitiva, les bases AC i DF, els triangles $\triangle\, ABC$ i $\triangle\, DEF$, i els angles restants $\widehat{BAC}$ i $\widehat{EDF}$ són iguals. [EI 4] ♠

I això és el que volíem demostrar. ♠

EI 27.[421] *Si un segment travessa* —εἰς δύο εὐθείας ἐμπίπτουσα—[422] *dos segments i hi fa angles alterns* —τὰς ἐναλλὰξ γωνίασ—[423] *iguals entre si,*[424] *aleshores aquests dos segments són paral·lels.*

---

420. Aquí Euclides no diu que això sigui així per hipòtesi.

421. Euclides prepara el camí cap al paral·lelisme establint una condició suficient dins la geometria neutral —vegeu la nota 255 (pàgina 83). Aleshores, el problema és saber si la condició és necessària. Vegeu EI 29, que és el primer teorema de geometria euclidiana.

422. Aquí Euclides usa la mateixa expressió que en el postulat cinquè, que significa simplement «fer un segment transversal».

423. Euclides no posa de manifest el caràcter «intern» o «extern» dels angles alterns, és a dir, tant són angles «alterns» els que hi ha marcats a la figura —que anomenem «alterns interns»— com els que se'ls oposen pel vèrtex, que anomenem «alterns externs».

424. Estableix una propietat —una condició suficient— que *caracteritza el paral·lelisme de dos segments* i prepara el terreny per als teoremes que no són «neutrals» sinó «euclidians», és a dir, que depenen del postulat P 5, un postulat que fins ara no ha aparegut en escena. Vegeu la nota 421.

Recordem que, en general, per Euclides, les rectes són segments. Però, en el cas del paral·lelisme, entenem que aquests segments mai no es tallen per més que es prolonguin. És a dir, si els pensem com a «rectes il·limitades», podem dir: «les dues rectes no es tallen».

Sigui EF un segment transversal als segments AB i CD
que hi determina angles alterns [interns] iguals, $\widehat{AEF}$ i $\widehat{EFD}$.

Afirmo que [els segments] AB i CD són paral·lels.[425]

[*Demostració*.] Si no és així,[426]
els segments, convenientment prolongats, es tallen o en la direcció de B i D o en la direcció de A i C —ἐπὶ τὰς *Β, Δ* μέρη ἢ ἐπὶ τὰ *Α, Γ*.[427]

a) Suposem que si els prolonguem cap a la banda de B, D, [P 2]
es tallen a [el punt] G.

Aleshores, al triangle $\triangle GEF$, l'angle extern $\widehat{AEF}$ és igual a l'angle intern oposat $\widehat{EFG}$.

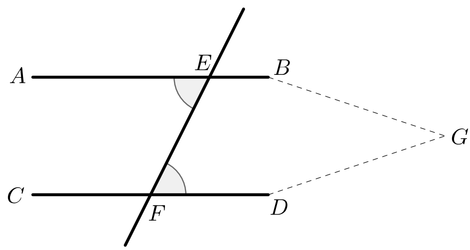


Figura Ei 27

I això és impossible. [Ei 16]

Per consegüent, quan es prolonguen AB i CD, no es tallen a la banda de B i D. ♠

b) Anàlogament, podem establir que tampoc no es tallen a la banda de A i C. ♠

Però si dos segments no es tallen en cap de les dues direccions possibles, són paral·lels. [Di 23]

En conseqüència, [el segment] AB és paral·lel a [el segment] CD.
I això és el que volíem demostrar. ♠

Ei 28. *Si un segment travessa dos segments i* a) *fa l'angle extern* —ἐκτὸς γωνίαν— *igual a l'angle intern oposat* —ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον—

425. Recordem que Euclides anomena AB «recta» i no pas «segment». Nosaltres, però, usem el terme «segment» llevat que explicitem el contrari. Per això direm «segments paral·lels» i no pas «rectes paral·leles».

426. Hipòtesi de l'absurd.

427. Textualment, «cap a les parts B, D, o cap a les parts A, C». [Di 23]
Fixem-nos en la disjuntiva d'Euclides: «Es tallen en un costat o en l'altre.» Aquesta disjuntiva no exclou que ho puguin fer en tots dos costats. Ara bé, si tenim en compte la Nc 9′ no ho podem fer, ja que aleshores dos segments (rectilinis) tancarien pla i això s'ha exclòs, com hem vist explícitament a la demostració d'Ei 4.

del mateix costat —αὐτὰ μέρη,[428] *o* b) *els interns del mateix costat [junts] són iguals a dos angles rectes, els segments són paral·lels.*[429]

Suposem que el segment EF travessa els segments AB i CD, i determina *a*) l'angle extern $\widehat{EGB}$ igual a l'angle intern oposat $\widehat{GHD}$, o *b*) els angles interns sobre el mateix costat $\widehat{BGH}$ i $\widehat{GHD}$ iguals a dos angles rectes.

Afirmo que [els segments] AB i CD són paral·lels.

[*Demostració.*] *a*) Com que [, perhipòtesi] els angles $\widehat{EGB}$ i $\widehat{GHD}$ són iguals,[430] i els angles $\widehat{EGB}$ i $\widehat{AGH}$ també, [Ei 15]
l'angle $\widehat{AGH}$ és igual a l'angle $\widehat{GHD}$, [Nc 1]
i tots dos són angles alterns.

Per tant, [els segments] AB i CD són paral·lels. [Ei 27] ♠

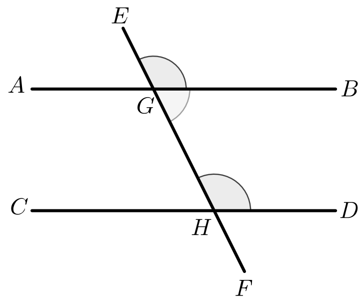


Figura Ei 28

b) De bell nou, com que els angles $\widehat{BGH}$ i $\widehat{GHD}$ [junts] són iguals a dos angles rectes,
i els angles $\widehat{AGH}$ i $\widehat{BGH}$ també, [Ei 13]
els angles $\widehat{BGH}$ i $\widehat{GHD}$ [junts] són iguals als angles $\widehat{AGH}$ i $\widehat{BGH}$ [junts]. [Nc 1 i P 4]

Ara, de cada parella [d'angles], sostraiem l'angle $\widehat{BGH}$.

D'això en resulta que els angles que romanen, $\widehat{GHD}$ i $\widehat{AGH}$, són iguals. [Nc 3]

I aquests [angles] són alterns.

Per tant, [els segments] AB i CD són paral·lels. [Ei 27] ♠

I això és el que volíem demostrar. ♠

---

428. Aquests angles s'anomenen «angles corresponents». Fixem-nos que l'un és intern i l'altre extern. Això és el que mostra la figura. En canvi, la figura no posa en relleu els angles de l'altre cas.

Aquesta és una altra condició suficient del paral·lelisme de dos segments rectilinis.

429. Novament, és una proposició doble i, com l'anterior, prepara les propietats que determinen el paral·lelisme i les que, amb P 5, imposen el paral·lelisme.

430. Com mostra la figura adjunta.

p. 29

A.1.1d_2 Les proposicions [euclidianes] d'Ei

[*Geometria euclidiana*][431]

Ei 29. *Si un segment cau sobre dos segments paral·lels, determina* a) *angles alterns interns iguals,* b) *angles corresponents iguals,*[432] i c) *angles interns del mateix costat [junts] iguals a dos angles rectes.*[433]

Si el segment EF travessa els segments paral·lels AB i CD,[434] afirmo que determina
a) els angles alterns $\widehat{AGH}$ i $\widehat{GHD}$ iguals,
b) els angles corresponents $\widehat{EGB}$ i $\widehat{GHD}$ iguals, i
c) els angles interns del mateix costat [junts] —és a dir, els angles $\widehat{BGH}$ i $\widehat{GHD}$— iguals a dos angles rectes.[435]

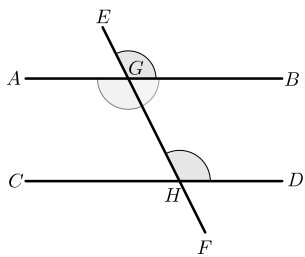


Figura Ei 29

[*Demostració*.] *a*) Perquè si l'angle $\widehat{AGH}$ difereix de l'angle $\widehat{GHD}$,[436] aleshores un dels dos és més gran.

Sigui $\widehat{AGH}$ l'angle més gran.

Afegim l'angle $\widehat{BGH}$ a cadascun; aleshores els angles $\widehat{AGH}$ i $\widehat{BGH}$ [junts] són més grans que els angles $\widehat{BGH}$ i $\widehat{GHD}$ [junts]. [Nc 4′]

Però els angles $\widehat{AGH}$ i $\widehat{BGH}$ [junts] fan dos angles rectes. [Ei 13]

Per tant, els angles $\widehat{BGH}$ i $\widehat{GHD}$ [junts] fan menys de dos angles rectes.

---

431. A partir d'ara hi intervé el postulat cinquè i comença la geometria euclidiana.

432. Vegeu la nota 428 (pàgina 125). L'enunciat parla d'un angle extern i d'un angle intern oposat.

433. Aquest teorema engloba tres proposicions que recullen les tres condicions suficients, que ara passen a ser necessàries.

434. Podríem dir «si EF talla els dos segments AB i CD» o també «EF és un segment secant del parell de segments AB i CD».

435. Observem que hi ha altres parelles d'angles alterns, corresponents i interns del mateix costat. A més, hi hauria *d*) els angles externs del mateix costat, però Euclides no en parla.

436. Hipòtesi de l'absurd.

Però dos segments, prolongats de forma indefinida de la banda dels angles que fan menys de dos angles rectes,[437] es tallen. **[P 5]**[438]

Per tant, si prolonguem els segments AB i CD, es tallen. [P 2]

Però no es tallen perquè, per hipòtesi, són paral·lels. [Dɪ 23]

En conseqüència, l'angle $\widehat{AGH}$ no difereix de l'angle $\widehat{GHD}$, i, per tant, tots dos angles són iguals. ♠

c)[439] De bell nou, l'angle $\widehat{AGH}$ és igual a l'angle $\widehat{EGB}$. [Eɪ 15]

Per tant, l'angle $\widehat{EGB}$ també és igual a l'angle $\widehat{GHD}$. [Nc 1]

Afegim l'angle $\widehat{BGH}$ a cadascun.

D'això en resulta que els angles $\widehat{EGB}$ i $\widehat{BGH}$ [junts] són iguals als angles $\widehat{BGH}$ i $\widehat{GHD}$ [junts]. [Nc 2]

Però els angles $\widehat{EGH}$ i $\widehat{BGH}$ [junts] fan dos angles rectes. [Eɪ 13]

En conseqüència, els angles $\widehat{BGH}$ i $\widehat{GHD}$ [junts] també els fan. [Nc 1] ♠

I això és el que volíem demostrar. ♠

Eɪ 30. [*Dos*] *segments paral·lels a un mateix segment són paral·lels.*[440]
Sigui cada un dels segments AB i CD paral·lel a EF.[441]

Afirmo que AB també és paral·lel a CD.

[*Demostració.*] Sigui GK un segment que talla els segments AB i CD.[442]

---

437. És una variació lleu respecte de l'enunciat P 5, més explícit. Vegeu Heath (1925), p. 312, nota 23.

438. Com ja hem dit abans, és la primera vegada que Euclides usa el postulat dels segments paral·lels i, per això, excepcionalment, l'hem escrit en negreta. Es tracta, doncs, del primer teorema euclidià dels *Elements*.

439. Euclides omet demostrar *b*. Però la certesa de *b* s'obté aplicant *a* i Eɪ 15 als angles $\widehat{AGH}$ i $\widehat{EGB}$ per tal d'obtenir dos angles alterns —$\widehat{AGH}$ i $\widehat{GHD}$— iguals.

440. En realitat, és un porisma que es basa en l'aplicació del resultat anterior dues vegades i de la Nc 1 per a poder lligar la igualtat d'angles.

441. Atenció! A la figura Eɪ 30, el segment EF es troba entre els segments AB i CD. La demostració també és vàlida, si EF no es troba entre AB i CD? De fet, només cal convèncer-se que si GK talla AB i EF, talla també, prolongant-lo, si cal, el segment CD per la unicitat del segment paral·lel a un segment des d'un punt, Eɪ 31′ (pàgina 129).

442. Podríem pensar que n'hi ha prou d'agafar punts arbitraris G i K dels segments AB i CD, respectivament, i unir-los [P 1].

Atès que el segment GK talla els segments paral·lels AB i EF,[443] els angles $\widehat{AGK}$ i $\widehat{GHF}$ són iguals. [Ei 29]

De bell nou, com que el segment GK talla els segments paral·lels EF i CD,
els angles $\widehat{GHF}$ i $\widehat{GKD}$ són iguals. [Ei 29]

Però hem provat també que els angles $\widehat{AGK}$ i $\widehat{GHF}$ són iguals.

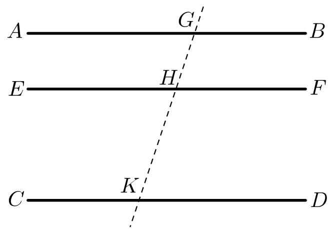


Figura Ei 30

Per tant, els angles $\widehat{AGK}$ i $\widehat{GKD}$ són iguals [Nc 1]
i, alhora, alternats. ♠

En conseqüència, els segments AB i CD són paral·lels.[444] [Ei 27]
I això és el que volíem demostrar. ♠

Ei 31. *Volem tirar un segment paral·lel al segment donat que passi per un punt donat* [*exterior a un segment donat*].[445]
Siguin A un punt donat i BC un segment donat.

443. Euclides dóna per fet que la prolongació GK d'un segment GH que en talla un altre, AB, talla també qualsevol segment paral·lel, CD o la seva prolongació (figura Ei 30). És un porisma immediat de la unicitat del segment paral·lel (Ei 31′, pàgina 129).

De retruc, GK talla EF perquè es troba entre AB i CD. Si EF no és enmig de AB i CD, cal prolongar GK per l'extrem adequat fins a tallar CD [P 2]. Vegeu la nota 441 (pàgina 127).

444. Aquesta demostració és interessant perquè usa el paral·lelisme per a veure que dos angles alterns són iguals, i alhora usa el fet que els angles alterns iguals imposen el paral·lelisme. Mà de mestre! L'aconsello com a text de lectura i de meditació del procés deductiu i de la manera com juguen els postulats en cada cas: què depèn d'un postulat i què no!

445. Aquesta proposició està fora de lloc en el sentit que no necessita el postulat dels paral·lels. Si tenim en compte el problema resolt a Ei 23, la proposició Ei 31 hauria d'haver-hi anat darrere, ja que és un simple porisma. És un resultat útil per a entendre el que dèiem a la nota 444.

Ens podem preguntar si, de fet, el que Euclides volia demostrar aquí no era l'«existència» del (segment) paral·lel des d'un punt exterior sinó la «unicitat», un resultat que curiosament no es troba als *Elements*.

La pregunta que escau és: és possible demostrar la unicitat? La demostració té un grau massa alt de dificultat? Les respostes respectives són: sí, és possible; i no, no és més difícil que altres teoremes que ja hem vist.

Volem construir un segment que sigui paral·lel al segment BC pel punt A.

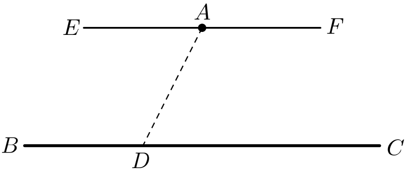


Figura EI 31

[*Construcció.*] Sigui D un punt arbitrari de BC.

Unim DA. [P 1]

Ara, sobre el segment DA i al punt A,
tirem un angle $\widehat{DAE}$ igual a l'angle $\widehat{ADC}$. [EI 23]

Prolonguem el segment AF amb un segment EA. [P 2] ♣

[*Demostració.*] Aleshores, com que el segment AD, que talla els dos segments BC i EF, produeix els angles alterns $\widehat{DAE}$ i $\widehat{ADC}$, que [, per construcció,] són iguals,
resulta que el segment EAF és paral·lel al segment BC.

Per tant, pel punt donat A, hem dibuixat un segment EAF paral·lel al segment donat BC.

I això és el que volíem demostrar. ♠

[**Incís al text 2.** EI 31′. *Per un punt donat només podem tirar un* [*segment*] *paral·lel a un segment donat.*

Siguin A un punt donat i BC un segment donat.

Afirmo: per A solament hi passa un segment paral·lel a BC.

[*Demostració.*] D'entrada, pel punt A,
tirem un [segment] paral·lel EF i un [segment] perpendicular AL a [el segment] BC.[446] [EI 31 i 12]

N'oferim l'enunciat i la demostració —una demostració per l'absurd— com a proposició EI 31′ entre claudàtors perquè no forma part, com dèiem, dels *Elements* d'Euclides sinó que és un incís.

Així, haurem demostrat les dues condicions que conté l'«axioma dels paral·lels de Playfair»: «Per un punt exterior a una recta podem tirar una [recta] paral·lela, i només una.»

Tots dos enunciats —el d'Euclides i el de Playfair— són equivalents (Heath (1925), p. 313). Per tant, el postulat de Playfair serveix també com a postulat dels (segments) paral·lels.

446. A la figura EI 31′, ho hem fet tirant, pel punt A, un [segment] AL perpendicular a BC [EI 12] i, després, un altre AF perpendicular a AL [EI 11]. Els angles alterns són rectes i, per tant, iguals [Nc 4]. D'ací es segueix que [els segments] BC i EF —on EA és una prolongació de AF— són paral·lels.

Fem-ne ara un altre, GH, que passi per A diferent del segment EF.

Prolonguem el segment AL fins al segment KL. [P 2]

Com que els segments EF i GH són diferents i passen per A, formen l'angle $\widehat{HAF}$ de vèrtex A.

L'angle d'incidència de HA sobre KL al punt A està format pels angles $\widehat{HAF}$ i $\widehat{FAL}$, que és recte.

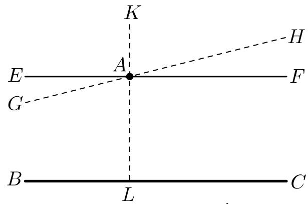


FIGURA EI 31′

D'això en resulta que l'angle $\widehat{HAL}$ és més gran que l'angle recte $\widehat{FAL}$[447] [Nc 5]

i, en conseqüència, és diferent de l'angle $\widehat{ALB}$, que és recte.[448]

Per tant, els angles alterns que determina la secant KL sobre la parella de segments GH i BC són diferents.

I els segments GH i BC no són paral·lels, perquè si ho són,[449] els angles alterns interns són iguals.[450] [EI 29] ♠]

EI 32. *En un triangle arbitrari, si prolonguem un dels costats,* a) *l'angle extern és igual a la suma dels angles interns oposats considerats junts, i* b) *els tres angles del triangle valen dos angles rectes.*[451]

Sigui $\triangle ABC$ un triangle.

Prolonguem un dels seus costats BC fins al punt D. [P 2]

Afirmo que a) l'angle extern $\widehat{ACD}$ és igual a la suma dels dos angles interns oposats $\widehat{CAB}$ i $\widehat{ABC}$, i que b) els tres angles interns $\widehat{ABC}$,

447. Sabem que quan un segment incideix sobre un altre, els angles que determina [junts] fan dos angles rectes [EI 13]. I si no són rectes, un és més gran que un angle recte i l'altre més petit.

448. Anàlogament, podíem haver considerat l'angle $\widehat{GAL}$ més petit que un angle recte.

449. Hipòtesi de l'absurd.

450. Podríem usar la impossibilitat de tirar dos segments perpendiculars a un segment per un mateix punt: EI 11′ i 12′ (incís 1, pàgina 104).

451. Eudem afirma que aquest resultat es deu als matemàtics pitagòrics, i Eutoci atribueix a Gemine que «els antics —οἱ ἀρχαῖοι— ja l'haguessin examinat».

Novament ens trobem amb una proposició amb dues conclusions, si bé la segona és un porisma immediat de la primera.

$\widehat{BCA}$ i $\widehat{CAB}$ són iguals a dos angles rectes.

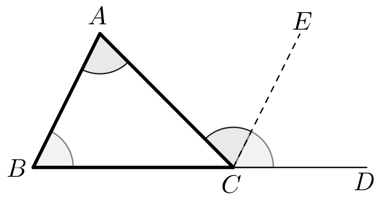


FIGURA EI 32

[*Demostració.*] *a*) Pel punt C tirem el [segment] CE paral·lel al segment AB. [EI 31]

Com que AB és paral·lel a EC, i AC talla tots dos segments, els angles alterns $\widehat{BAC}$ i $\widehat{ACE}$ són iguals. [EI 29]

Novament, atès que AB és paral·lel a EC i BD és una transversal comuna a tots dos segments, l'angle extern $\widehat{ECD}$ i el corresponent $\widehat{ABC}$ són iguals. [EI 29]

Però hem vist que l'angle $\widehat{ACE}$ és igual a l'angle $\widehat{BAC}$.

Per tant, l'angle total $\widehat{ACD}$ és igual als dos angles interns oposats $\widehat{BAC}$ i $\widehat{ABC}$ [junts]. [Nc 2, iterada] ♠

b) Afegim a cadascun l'angle $\widehat{ACB}$.

Aleshores els angles $\widehat{ACD}$ i $\widehat{ACB}$ [junts] són iguals als tres angles $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCA}$ i $\widehat{CAB}$ [junts]. [Nc 2]

Però els angles $\widehat{ACD}$ i $\widehat{ACB}$ [junts] valen dos angles rectes. [EI 13]

En definitiva, doncs, els angles [interns del triangle] $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCA}$ i $\widehat{CAB}$ [junts] són iguals a dos angles rectes. [Nc 1] ♠

I això és el que volíem demostrar. ♠[452]

EI 33. *Els segments que uneixen* [*els extrems de*] *segments paral·lels iguals per un mateix costat*[453] *també són* a) *paral·lels i* b) *iguals.*[454]

---

452. Alguns autors proporcionen dos porismes d'EI 32. Vegeu la nota 112 (pàgina 29) i l'exercici 1 (pàgina 14).

453. És obvi que exclou el cas en el qual els extrems s'uneixen formant les diagonals BC i AD, com queda palès en la part explicativa.

454. El text grec diu: —ἐπὶ τὰ αυτὰμέρη ἐπιζευγνύουσαι.

Aquesta proposició, que conté també dues tesis, proporciona una propietat dels paral·lelograms que s'acostuma a enunciar breument així: «Paral·lels entre paral·lels són iguals» —amb el benentès que es tracta de segments. Observem que si dues parelles de segments es tallen de manera que els segments oposats que determinen siguin iguals dos a dos, els segments oposats són paral·lels entre si i, per tant, la figura que formen és un paral·lelogram. Vegeu DI 22 (pàgina 80).

Siguin AB i CD [dos segments] iguals paral·lels, i AC i BD [els segments] que uneixen [els extrems] que són en la mateixa direcció.

Afirmo que els segments AC i BD són *a*) iguals i *b*) paral·lels.

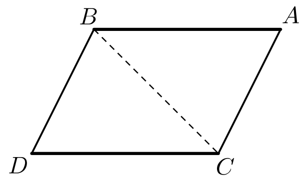


Figura Ei 33

[*Demostració.*] Unim BC. [P 1]

a) Atès que AB és paral·lel a CD,
i BC els talla,
els angles alterns $\widehat{ABC}$ i $\widehat{BCD}$ són iguals. [Ei 29]

I [els segments] AB i CD són iguals, i BC comú.

Per tant, els costats AB i BC són iguals als dos costats DC i CB.

I també ho són els angles $\widehat{ABC}$ i $\widehat{BCD}$.[455]

Per tant, les bases AC i BD, i els triangles $\triangle\, ABC$ i $\triangle\, BCD$ són iguals. [Ei 4] ♠

b) També els angles restants són iguals als angles restants,
és a dir, els que subtendeixen costats iguals. [Ei 4]

Per tant, els angles $\widehat{ACB}$ i $\widehat{CBD}$ són iguals.

I, atès que la secant BC dels segments AC i BD determina angles alterns iguals entre si, els segments AC i BD són paral·lels. [Ei 27]

I ja s'havia provat que són iguals. ♠

I això és el que volíem demostrar. ♠

Ei 34. *A les superfícies paral·lelogramàtiques* —παραλληλόγραμμων χωρίων—[456] a) *els costats i els angles oposats són iguals entre si, i* b) *el diàmetre* —διάμετροσ—[457] *dimidia les superfícies.*

---

455. Euclides —o els copistes ulteriors— no sempre és curós de l'ordre amb què escriu les lletres. Per una qüestió de coherència en la correspondència, hauria d'haver escrit DC, CB i $\widehat{DCB}$, respectivament. Vegeu Vitrac (1990), volum i, p. 258, notes 141 i 142.

456. És la primera vegada que Euclides parla de la superfície paral·lelogramàtica i ho fa referint-s'hi com a «àrea». No s'hi refereix com a «línia», és a dir, usant παραλληλόγραμμος, fins al final de la demostració. Cal observar que no l'ha definit enlloc, però hem d'entendre que una superfície paral·lelogramàtica «és la figura formada per dues parelles de segments paral·lels dos a dos». Així es vinculen amb la proposició anterior. Vegeu Heath (1925), volum i, p. 325, nota 1, i la nota 244 (pàgina 80).

457. No usa la paraula «diagonal» (διαγώνιος), un terme que trobem solament a Exi 28. Nosaltres, però, l'usarem com es fa actualment.

Siguin $\varparallelogram ACDB$ un paral·lelogram[458] i BC la seva diagonal. [P 1]

Afirmo que *a*) els seus costats i angles oposats són iguals entre si, i *b*) el diàmetre BC en dimidia l'àrea.[459]

[*Demostració*.] *a*) Com que AB és paral·lel a CD i la recta BC els talla,
els angles alterns $\widehat{ABC}, \widehat{BCD}$ són iguals. [Ei 29]

De bell nou, com que AC i BD són paral·lels i BC els talla,
els angles alterns $\widehat{ACB}, \widehat{CBD}$ són iguals. [Ei 29]

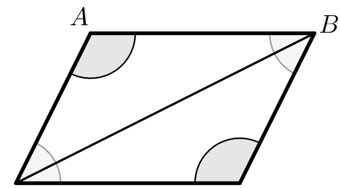


Figura Ei 34

Per tant, els triangles $\triangle ABC$ i $\triangle DCB$ tenen els dos angles $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCA}$ iguals als dos angles $\widehat{BCD}$ i $\widehat{CBD}$ [, respectivament,]
i un dels costats igual a un dels costats,
en concret, el costat comú a tots dos que suporta els dos angles iguals.

Així doncs, tenen els costats i els angles restants iguals. [Ei 26]

I, a més, els costats AB i CD, i AC i BD són iguals [, respectivament,]
i també l'angle $\widehat{BAC}$ ho és a l'angle $\widehat{CDB}$.

I, atès que els angles $\widehat{ABC}$ i $\widehat{BCD}$, i $\widehat{CBD}$ i $\widehat{ACB}$ són iguals entre si [, respectivament,]
l'angle total $\widehat{ABD}$ és igual a l'angle total $\widehat{ACD}$. [Nc 2]

Però s'ha provat que l'angle $\widehat{BAC}$ és igual a l'angle $\widehat{CDB}$.

Per tant, al paral·lelogram $\varparallelogram ACDB$, els costats oposats i els angles oposats són iguals. ♠

b) Ara afirmo que el diàmetre dimidia l'àrea.

Com que AB i CD són iguals, BC és comú, i els dos costats AB i BC són iguals als dos costats DC i CB
i els angles $\widehat{ABC}$ i $\widehat{BCD}$ són iguals,

---

458. Anomenarem les superfícies paral·lelogramàtiques simplement «paral·lelograms» atès que el context aclareix sempre si considerem la figura o l'àrea.

459. A la demostració, les notacions no són gaire acurades (vegeu la nota 455, pàgina 132) i hi ha un error quan anomena el paral·lelogram.

les bases AC i DB, i els triangles $\triangle ABC$ i $\triangle DCB$ també ho són. [Ei 4]

Per tant, la diagonal BC dimidia el paral·lelogram —παραλληλόγραμμον— $\varparallelogram ACDB$. ♠

I això és el que volíem demostrar. ♠

Ei 35. *Els paral·lelograms sobre una mateixa base i entre els mateixos (segments) paral·lels són iguals entre si.*[460]

Siguin $\varparallelogram ABCD$ i $\varparallelogram EBCF$ dos paral·lelograms amb la mateixa base BC i situats damunt els mateixos (segments) paral·lels AF i BC.

Afirmo que els paral·lelograms $\varparallelogram ABCD$ i $\varparallelogram EBCF$ són equivalents.[461]

[*Demostració.*] Com que $\varparallelogram ABCD$ és un paral·lelogram, AD és igual a BC. [Ei 34]

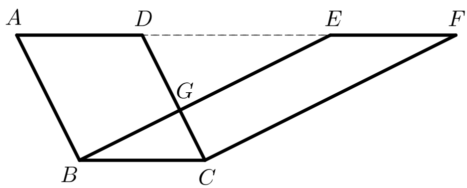


Figura Ei 35

Per la mateixa raó, EF és igual a BC.

Per tant, AD ho és a EF, [Nc 1]
i DE és comú.

Així doncs, AE sencer és igual a DF sencer. [Nc 2]

Però AB és igual a DC. [Ei 34]

Per tant, els dos costats EA i AB són iguals als dos costats FD i

460. Són necessàries tres observacions. En primer lloc, aquí comença el camí que permet establir que tot polígon (convex) és quadrable, és a dir, convertible —amb regle i compàs— en un quadrat amb la mateixa superfície. En segon lloc, en aquesta proposició Euclides estableix que tots els paral·lelograms amb una base comuna i la mateixa altura —un concepte que no necessita— tenen la mateixa superfície, però, en la següent, veu que no cal que la base sigui comuna, que n'hi ha prou que les bases siguin iguals. Com a porisma, dedueix que els triangles amb bases iguals sobre un mateix segment i vèrtex en un mateix [segment] paral·lel a la base tenen la mateixa superfície. Tampoc li cal introduir-hi l'altura. En tercer lloc, aquí Euclides inicia la tècnica del «tangram generalitzat». Vegeu Pla (2012), p. 89–100.

Curiosament, a Dvi 4 introdueix el concepte d'«altura» (ὕψος) d'una figura plana, i al llibre xi —a partir d'Exi 29— l'usa en el cas dels sòlids.

461. És a dir, tenen la mateixa àrea. A vegades es diu: «són iguals».

DC, respectivament,
i l'angle $\widehat{EAB}$ ho és a l'angle $\widehat{FDC}$, ja que són angles corresponents. [Ei 29]

En conseqüència, les bases EB i FC, i els triangles $\triangle\, EAB$ i $\triangle\, FDC$ són iguals. [Ei 4]

Traiem, de cadascun, el triangle $\triangle\, DGE$.

Els trapezis resultants $ABGD$ i $EGCF$ són iguals.[462] [Nc 3]

Ara afegim a cadascun el triangle $\triangle\, GBC$.

D'això en resulta que el paral·lelogram complet $\varparallelogram\, ABCD$ és equivalent al paral·lelogram complet $\varparallelogram\, EBCF$.[463] [Nc 2]

I això és el que volíem demostrar. ♠

Ei 36. *Els paral·lelograms amb bases iguals i sobre els mateixos* (*segments*) *paral·lels són equivalents entre si.*[464]

Siguin $\varparallelogram\, ABCD$ i $\varparallelogram\, EFGH$ dos paral·lelograms muntats sobre bases BC i FG iguals, i sobre els mateixos segments paral·lels AH i BG.

Afirmo que els paral·lelograms $\varparallelogram\, ABCD$ i $\varparallelogram\, EFGH$ són equivalents.

[*Demostració.*] Unim BE i CH. [P 1]

Aleshores, atès que [els segments] BC i FG, i FG i EH són iguals, respectivament, [Ei 34]
resulta que BC i EH són iguals. [Nc 1]

Però, a més, són paral·lels.

Hem tirat EB i HC,

---

462. Recordem Di 22 (pàgina 80).

463. Fixem-nos en el procés de tangram: $\varparallelogram\, ADCB := \triangle\, AEB - \triangle\, DEG + \triangle\, BGC$ i $\varparallelogram\, EFCB := \triangle\, DFC - \triangle\, DEG + \triangle\, BGC$. Això fa que l'única cosa que s'hagi d'establir sigui la igualtat dels triangles $\triangle\, AEB, \triangle DFC$. Euclides ho fa usant les propietats dels paral·lelograms i el fet que tinguin una base comuna. Aquests resultats li permeten jugar amb «peces equivalents», ajuntant-ne unes i separant-ne d'altres. Quin enginy i quina elegància!

Aquesta proposició i la següent són molt adequades com a text clàssic precís, clar, elegant i entenedor.

464. És un porisma immediat de la proposició anterior i de Nc 1, si aconseguim veure que els podem connectar amb un paral·lelogram comú que tingui una base comuna amb cada un dels paral·lelograms donats.

i sabem que segments que uneixen segments iguals paral·lels en la mateixa direcció són també iguals i paral·lels. [EI 33]

Per tant, ▱ $EBCH$ és un paral·lelogram,[465]

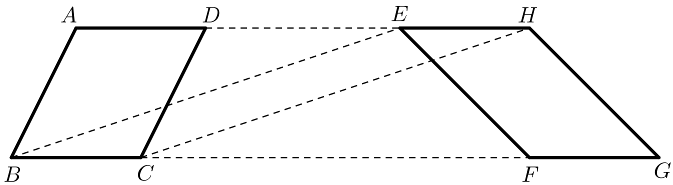


FIGURA EI 36

i és equivalent al [paral·lelogram] ▱ $ABCD$
perquè tots dos tenen la mateixa base BC i es troben als mateixos (segments) paral·lels. [EI 35]

Per la mateixa raó, [els paral·lelograms] ▱ $EFGH$ i ▱ $EBCH$ són equivalents [EI 35]
i, per tant, els paral·lelograms ▱ $ABCD$ i ▱ $EFGH$ també ho són. [Nc 1]

I això és el que volíem demostrar. ♠

EI 37. *Dos triangles amb una mateixa base i* [*col·locats*] *damunt els mateixos* (*segments*) *paral·lels són equivalents.*[466]

Siguin △ ABC i △ DBC dos triangles amb una base comuna BC i que estan col·locats sobre els mateixos (segments) paral·lels AD i BC.

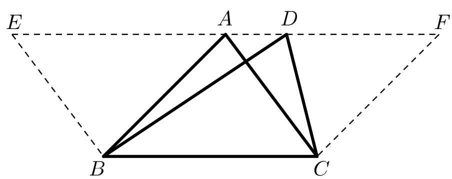


FIGURA EI 37

Afirmo que els dos triangles △ ABC i △ DBC són equivalents.

[*Demostració.*] Unim AD [P 1]
i el prolonguem en les direccions de E i de F. [P 2]

Per B tirem el [segment] paral·lel BE a CA, [EI 31]
i per C el [segment] paral·lel CF a BD. [EI 31]

---

465. Com dèiem a la nota 464 (pàgina 135), és el paral·lelogram que connecta els dos paral·lelograms donats amb una base comuna amb cadascun.

466. És un porisma immediat d'EI 35, atès que «tot triangle girat i afegit a l'inicial proporciona un paral·lelogram».

Aleshores, cada una de les figures ▱ $EBCA$ i ▱ $DBCF$ és un paral·lelogram i totes dues són equivalents
perquè tenen la mateixa base BC i són als mateixos (segments) paral·lels BC i EF. [Ei 35]

Ara bé, el triangle $\triangle ABC$ és equivalent a la meitat del paral·lelogram ▱ $EBCA$
perquè la diagonal AB el dimidia. [Ei 34]

I el triangle $\triangle DBC$ és la meitat del paral·lelogram ▱ $DBCF$
perquè la diagonal DC el dimidia. [Ei 34]

[Però les meitats de coses iguals també són iguals.][467] [Nc 6′]

Per tant, el triangle $\triangle ABC$ és equivalent al triangle $\triangle DBC$.
I això és el que volíem demostrar. ♠

Ei 38. *Dos triangles amb bases iguals col·locats damunt els mateixos* (*segments*) *paral·lels són equivalents.*[468]

Siguin $\triangle ABC$ i $\triangle DEF$ dos triangles amb bases BC i EF iguals col·locats damunt els mateixos segments paral·lels BF i AD.

Afirmo que els dos triangles $\triangle ABC$ i $\triangle DEF$ són equivalents.

[*Demostració.*]

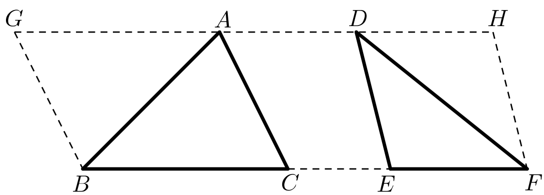


Figura Ei 38

Considerem el segment AD i el prolonguem en les dues direccions fins a G i fins a H. [P 1 i 2]

Per B tirem [el segment] BG paral·lel a [el segment] CA, [Ei 31]
i per F tirem [el segment] FH paral·lel a [el segment] ED. [Ei 31]

Cadascuna de les figures ▱ $GBCA$ i ▱ $DEFH$ és un paral·lelogram i, a més, totes dues són equivalents,
ja que les bases BC i EF són iguals

467. Com ja hem dit abans a la pàgina 21, és un afegit de Heiberg. De fet, afirma que és una noció comuna que data de l'època de Teó d'Alexandria. No tornarem a repetir-ne l'enunciat. Solament n'indicarem l'ús.

468. Vegeu la nota 466 (pàgina 136) aplicada a Ei 36.

i les figures es troben als mateixos (segments) paral·lels BF i GH.

[EI 36]

A més, el triangle $\triangle ABC$ és equivalent a la meitat del paral·lelogram $\square GBCA$, atès que la diagonal AB el dimidia. [EI 34]

D'això en resulta que els triangles $\triangle ABC$ i $\triangle DEF$ són equivalents. [Nc 6′][469]

I això és el que volíem demostrar. ♠

EI 39. *Dos triangles equivalents construïts sobre una mateixa base i al mateix costat [de la base] estan col·locats entre els mateixos paral·lels.*[470]

Siguin $\triangle ABC$ i $\triangle DBC$ dos triangles amb la base comuna BC i amb els vèrtexs al mateix costat [de la base].

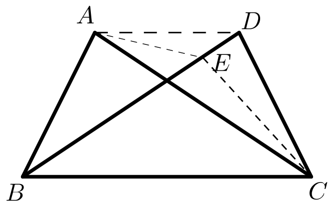


FIGURA EI 39

[Afirmo que estan col·locats entre els mateixos paral·lels.]

Considerem [el segment] AD. [P 1]

Afirmo que els [segments] AD i BC són paral·lels.

[*Demostració*.] Si AD no és paral·lel a BC,[471]

per A, tirem AE paral·lel a BC [EI 31]

i unim EC. [P 1]

D'això en resulta que els triangles $\triangle ABC$ i $\triangle EBC$ són equiva-

469. Vegeu la nota 467 (pàgina 137).

470. Aquesta proposició i la següent són les recíproques de les dues anteriors, respectivament. És a dir, si dos triangles tenen bases iguals i són equivalents, els podem col·locar entre els mateixos (segments) paral·lels —avui diríem: «tenen la mateixa altura». És clar que aquesta proposició solament és un recíproc parcial, en el sentit que cal afegir-hi l'expressió «cap al mateix costat». Observem, no obstant això, que si haguéssim dit «es poden col·locar» entre els mateixos paral·lels, en el sentit que podem fer una parella de triangles iguals als donats i col·locats entre els mateixos paral·lels, la condició seria supèrflua. Tanmateix, aquesta consideració no es troba als *Elements*. Curiosament, no estableix aquest recíproc per a paral·lelograms, que òbviament és un porisma d'EI 41. Vegeu el problema 15 (pàgina 62).

471. Hipòtesi de l'absurd.

lents, ja que tenen la mateixa base i estan col·locats entre les mateixes paral·leles. [Ei 37]

Però [, per hipòtesi,] els triangles $\triangle ABC$ i $\triangle DBC$ són equivalents.

Per tant, els triangles $\triangle DBC$ i $\triangle EBC$ també ho són, [Nc 1]
el més gran ho és al més petit. I això és impossible. [Nc 5]

Així doncs, [el segment] AE no és paral·lel a [el segment] BC.

Anàlogament, veiem que cap altre segment no és paral·lel a BC.

D'això en resulta, doncs, que AD és paral·lel a BC
[perquè, per un punt exterior a un segment, sempre en passa un de paral·lel]. [Ei 31]

I això és el que volíem demostrar. ♠

Ei 40. *Dos triangles equivalents construïts sobre bases iguals i al mateix costat [de la base] estan col·locats entre els mateixos (segments) paral·lels.*[472]

Siguin $\triangle ABC$ i $\triangle DCE$ dos triangles equivalents col·locats al mateix costat de les bases iguals BC i CE.

Afirmo que estan col·locats entre els mateixos (segments) paral·lels.

Considerem [el segment] AD. [P 1]

Afirmo que [el segment] AD és paral·lel a [el segment] BE.

[*Demostració*.] Si no és paral·lel,[473]
per A, tirem AF paral·lel a BE, [Ei 31]
i unim FE. [P 1]

D'això en resulta que els triangles $\triangle ABC$ i $\triangle FCE$ són equivalents,

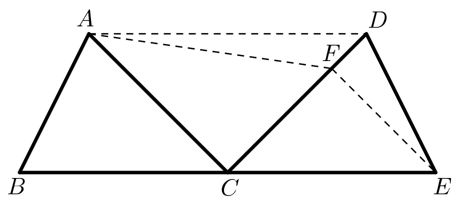


Figura Ei 40

ja que les bases BC i CE són iguals i estan entre els mateixos (segments) paral·lels BE i AF. [Ei 38]

[Per hipòtesi,] els triangles $\triangle ABC$ i $\triangle DCE$ són equivalents.

Per tant, els triangles $\triangle DCE$ i $\triangle FCE$ també ho són, [Nc 1]
el més gran ho és al més petit. I això és impossible.

472. Vegeu la nota 470 (pàgina 138).

473. Hipòtesi de l'absurd.

Per tant, [el segment] AF no és paral·lel a [el segment] BE.

Anàlogament, podem veure que tampoc ho és cap altre segment llevat de [el segment] AD.

D'això en resulta, doncs, que [el segment] AD és paral·lel a [el segment] BE

[perquè, per un punt exterior a un segment, sempre n'hi ha un de paral·lel. [Ei 31]]

I això és el que volíem demostrar. ♠[474]

Ei 41. *Si un paral·lelogram té la mateixa base que un triangle i tots dos estan entre els mateixos (segments) paral·lels, el paral·lelogram és [equivalent a] el doble que el triangle.*

Suposem que el paral·lelogram ▱ $ABCD$ té la mateixa base BC que el triangle $\triangle\, EBC$

i que tots dos estan col·locats entre els mateixos (segments) paral·lels BC i AE.

Afirmo que el paral·lelogram ▱ $ABCD$ és [equivalent a] el doble del triangle $\triangle\, EBC$.

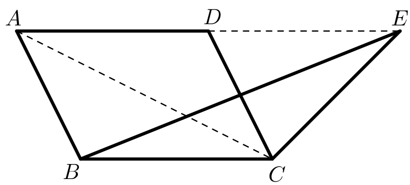


Figura Ei 41

[*Demostració.*] Considerem [el segment] AC. [P 1]

El triangle $\triangle\, ABC$ és equivalent al triangle $\triangle\, EBC$,

ja que també té la base BC

i està col·locat als mateixos (segments) paral·lels BC i AE. [Ei 37]

Però el paral·lelogram ▱ $ABCD$ equival al doble que el triangle $\triangle\, ABC$,

ja que la diagonal AC el dimidia. [Ei 34]

Per tant, el paral·lelogram ▱ $ABCD$ també equival al doble que el triangle $\triangle\, EBC$. [Nc 2 o 5′]

I això és el que volíem demostrar. ♠[475]

---

474. Segons Heath (1925), p. 337, és una proposició afegida.

475. De fet, aquest resultat ja s'ha establert a la primera part de la demostració d'Ei 37, on es veu que el doble d'un triangle és un paral·lelogram de la mateixa base i altura.

EI 42. *En un angle rectilini donat, hi volem construir un paral·lelogram equivalent a un triangle donat.*[476]

Siguin $\triangle\, ABC$ un triangle i $\hat{D}$ un angle rectilini donats.[477]

Volem construir un paral·lelogram amb l'angle rectilini $\hat{D}$[478] equivalent al triangle $\triangle\, ABC$.

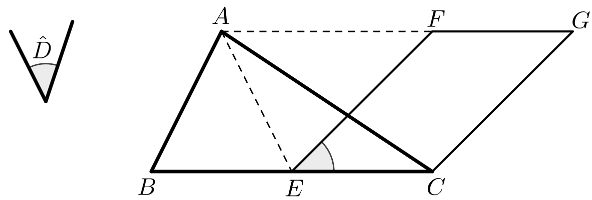


FIGURA EI 42

[*Construcció.*] Dimidiem la base BC al punt E, [EI 10] i unim AE. [P 1]

[Amb el vèrtex] al punt E del segment EC, construïm l'angle $\widehat{CEF}$ igual a l'angle $\hat{D}$.[479] [EI 23]

Per A tirem un segment AG paral·lel al segment EC, [EI 31] i prolonguem [el costat] EF [de l'angle $\widehat{CEF}$] fins que talla [el segment] AF. [P 2]

I, per C, tirem [el segment] CG paral·lel a [el segment] EF [fins que talla AG]. [EI 31 i P 2]

Aleshores, el [quadrilàter] ⌂ $FECG$ és un paral·lelogram [i és el que busquem]. ♣

[*Demostració.*] [Per construcció, és un paral·lelogram.]

Per tant, [els segments] BE i EC són iguals. [EI 34]

476. Aquesta proposició i la següent són simples porismes de les que fan referència als triangles i paral·lelograms amb bases iguals i entre els mateixos paral·lels. Volem posar en relleu que aquest és un altre dels passos que porten a quadrar una superfície poligonal plana, ja que si la podem triangular, la podem convertir en un paral·lelogram. Només queda, doncs, el pas de quadrar-lo.

477. Notem que Euclides usa una sola lletra per a designar l'angle. Vegeu la nota 285 (pàgina 91).

478. Aquesta frase significa: «La base i un costat del paral·lelogram fan un angle igual a l'angle donat $\hat{D}$.»

479. Queda pendent la qüestió de determinar com han de ser de llargs els costats d'aquest angle. El costat EC no importa perquè ja existeix. Però, i l'altre?

En conseqüència, els triangles $\triangle ABE$ i $\triangle AEC$ són equivalents, ja que tenen bases iguals, BE i EC, i estan entre els mateixos (segments) paral·lels BC i AG. [EI 38]

Per tant, el triangle $\triangle ABC$ és el doble que el triangle $\triangle AEC$.[480] [Nc 2]

Però el paral·lelogram ▱$FECG$ és el doble que el triangle $\triangle AEC$, ja que tots dos tenen la base comuna i estan entre els mateixos (segments) paral·lels. [EI 41]

Per tant, el paral·lelogram ▱$FECG$ és igual al triangle $\triangle ABC$, [Nc 1]

i té l'angle $\widehat{CEF}$ igual a l'angle donat $\hat{D}$.

Hem construït, doncs, el paral·lelogram ▱$FECG$ equivalent al triangle $\triangle ABC$ amb l'angle $\widehat{CEF}$ igual a (l'angle) $\hat{D}$.[481]

I això és el que volíem demostrar. ♠

EI 43. *En un paral·lelogram, els complements* —παραπληρώματα— *a l'entorn de la diagonal són equivalents.*[482]

Siguin ▱$ABCD$ un paral·lelogram i AC una diagonal.[483] [P 1]

[Al voltant de la diagonal] AC —περὶ δὲ τὴν $A\Gamma$—, considerem els paral·lelograms ▱EH i ▱FG, i [els paral·lelograms] ▱BK i ▱KD, que anomenem complements.[484]

---

480. Es compon de dos triangles iguals i, per tant, cada un n'és la meitat [Nc 2].

481. Aquí Euclides diu el que hem observat a la nota 478 (pàgina 141).

482. Què entén Euclides per «complements» d'un paral·lelogram a l'entorn de la diagonal? Ho aclareix tot seguit. Fa referència a una de les propietats dels «gnòmons» geomètrics dels paral·lelograms que precisarà al llibre II.

483. Recordem (nota 457, pàgina 132) que usem «diagonal» en lloc de «diàmetre».

484. Aquesta explicació s'hauria de trobar en el grup de les definicions. Fixem-nos que també són paral·lelograms. De fet, hem trossejat el paral·lelogram inicial en quatre parts, dues que comparteixen la diagonal del paral·lelogram ▱$ABCD$, i dues que són els complements. Fixem-nos també que Euclides introdueix la notació que dóna solament dos vèrtexs oposats del paral·lelogram, una notació que, d'ara endavant, usarà de vegades per a indicar els quadrilàters. Volem reafirmar la convicció de l'ús d'una certa simbologia formalista en l'obra d'Euclides.

Afirmo que els complements ▱ BK i ▱ KD són equivalents.
[*Demostració.*] Atès que ▱ $ABCD$ és un paral·lelogram i AC n'és la diagonal,
els triangles $\triangle\, ABC$ i $\triangle\, CDA$ són equivalents. [Ei 34]

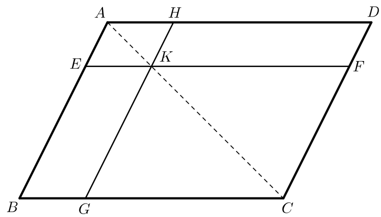


Figura Ei 43

Anàlogament, atès que ▱ EH és un paral·lelogram i AK la diagonal,
els triangles $\triangle\, AEK$ i $\triangle\, AHK$ són equivalents. [Ei 34]

Per la mateixa raó, els triangles $\triangle\, KFC$ i $\triangle\, KGC$ també ho són. [Ei 34]

Ara, com que els triangles $\triangle\, AEK$ i $\triangle\, AHK$, i els triangles $\triangle\, KFC$ i $\triangle\, KGC$ són equivalents, respectivament,
els triangles $\triangle\, AEK$ i $\triangle\, KGC$ [junts] són equivalents als triangles $\triangle\, AHK$ i $\triangle\, KFC$ [junts], [Nc 2]
i els triangles sencers $\triangle\, ABC$ i $\triangle\, ADC$ són equivalents. [Ei 34]

Per tant, els complements respectius ▱ BK i ▱ DK, que resten [un cop feta la sostracció,] són equivalents. [Nc 3]
I això és el que volíem demostrar.[485] ♠

Ei 44. *En un segment rectilini donat, hi volem aplicar* —παραβολεῖν— *un paral·lelogram equivalent al triangle donat, segons un angle donat.*[486]

Siguin AB un segment, $\triangle\, C$[487] un triangle i $\hat{D}$ un angle rectilini donats per endavant.

485. Vegeu les observacions sobre aquest teorema que fa Vitrac (1990), p. 273–275, en particular, sobre el fet que cal que els paral·lelograms que hi ha damunt la diagonal tinguin un vèrtex comú, com s'esdevé a la figura Ei 43.

486. Aquí comença l'«aplicació d'àrees». De fet, s'hi ofereix l'«aplicació en paràbola», que, com podem veure a Pla (2016*c*), p. 140 i 149, és d'arrel pitagòrica.

487. Fixem-nos que, en aquest cas, Euclides usa una sola lletra, $\triangle\, C$, per a referir-se a un triangle. Això és degut al fet que no li cal recórrer ni als vèrtexs ni als costats, sinó solament al triangle com a superfície.

Volem aplicar damunt el segment AB un paral·lelogram equivalent al triangle donat $\triangle C$, segons un angle igual a l'angle $\hat{D}$.

[*Construcció i demostració.*] Construïm el paral·lelogram $\varparallelogram BEFG$ equivalent al triangle $\triangle C$, amb l'angle $\widehat{EBG}$ igual a l'angle $\hat{D}$, [EI 42] de manera que BE estigui alineat amb AB.[488]

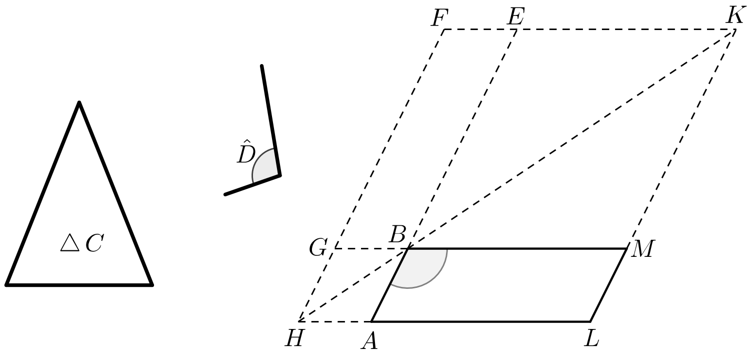


FIGURA EI 44

Ara prolonguem FG fins a H[489] [P 2]
i, pel punt A, tirem [el segment] AH paral·lel a [el segment] BG o a [el segment] EF. [EI 30 i 31]

Unim HB. [P 1]

Aleshores, atès que la recta HF talla els (segments) paral·lels AH i EF, els angles $\widehat{AHF}$ i $\widehat{HFE}$ sumen dos angles rectes. [EI 29]

D'això en resulta que els angles $\widehat{BHF}$ i $\widehat{GFE}$ [junts] fan menys de dos angles rectes. [Nc 5]

Per tant, els segments prolongats indefinidament es tallen.[490] [P 5]

En definitiva, HB i FE, prolongats, es tallen.

---

488. És a dir, que en sigui una prolongació.

489. Fixem-nos en el fet següent: el punt H queda determinat per la intersecció de GF i el paral·lel LH. De primer, hem de tirar el paral·lel, i després prolongar FG, i si cal el paral·lel, per tal que es tallin. De fet, s'ha de portar BA sobre el punt G [EI 3] i sobre la prolongació del segment FG [P 2]. Si ho fem, obtenim el punt H i, aleshores, tirem el paral·lel HA. El postulat P 2 diu que podem prolongar un segment amb un segment i això ens permet ajuntar segments. Vegeu la nota 279 (pàgina 89).

490. Fixem-nos que, de bell nou, usa el postulat cinquè de forma explícita. No en té prou d'haver-lo usat en els resultats que utilitza. Li cal

Prolonguem-los. Es tallaran a [el punt] K.

Ara, per K, tirem un [segment] paral·lel KL a EA o FH. [E I 31]

Prolonguem [els segments] HA i GB fins als punts L i M [, respectivament]. [P 2]

D'això en resulta que $\varparallelogram HLKF$ és un paral·lelogram,[491] [E I 30]
HK n'és la diagonal,
$\varparallelogram AG$ i $\varparallelogram ME$ són paral·lelograms,
i $\varparallelogram LB$ i $\varparallelogram BF$ són els complements de $\varparallelogram AG$ i $\varparallelogram ME$ sobre HK.[492] ♣

Per tant, $\varparallelogram LB$ i $\varparallelogram BF$ són equivalents. [E I 43]

Però [, per construcció,] el paral·lelogram $\varparallelogram BF$ és equivalent al triangle $\triangle C$.

Per tant, el paral·lelogram $\varparallelogram LB$ equival al triangle $\triangle C$. [Nc 1]

I, com que els angles $\widehat{GBE}$ i $\widehat{ABM}$ són iguals [E I 15]
i l'angle $\widehat{GBE}$ és igual a l'angle $\hat{D}$, l'angle $\widehat{ABM}$ és igual a l'angle $\hat{D}$. [Nc 1]

En definitiva, el paral·lelogram $\varparallelogram LB$ és equivalent al triangle donat $\triangle C$ i s'ha aplicat damunt el segment AB segons un angle $\widehat{ABM}$ igual a l'angle $\hat{D}$.

I això és el que volíem demostrar. ♠

E I 45. *Volem construir un paral·lelogram equivalent a una figura poligonal rectilínia segons un angle donat.*[493]

---

per a poder garantir l'existència d'un punt d'intersecció. En aquest sentit, podem dir que P 5 és existencial.

491. Recordem que Euclides no defineix mai què entén per paral·lelogram (vegeu la nota 71, pàgina 18) però, com ja hem vist abans, el context permet comprendre que és un quadrilàter que té els costats oposats paral·lels dos a dos. Vegeu el problema 12 (pàgina 62).

492. Aquí s'acaba la construcció; però Euclides no ho planteja de forma tan nítida com en altres indrets.

493. És a dir, l'«aplicació d'àrees» —de fet, l'«aplicació en paràbola»— a figures poligonals arbitràries. Òbviament està lligada a la «transformació d'àrees» que ha de permetre «quadrar les figures poligonals», però encara cal veure que un rectangle és quadrable, cosa que no trobarem fins a E II 14. És un problema additiu, en la línia de la nota 279 (pàgina 89). Euclides l'anomena simplement εὐθὺγραμμον, «figura». Es tracta de trossejar la figura en triangles.

Siguin ⬠ $ABCD$ la figura poligonal i $\hat{E}$ l'angle rectilini donats.

Volem construir un paral·lelogram, amb un angle [igual a l'angle] donat $\hat{E}$, igual a la figura ⬠ $ABCD$.[494]

[*Construcció*.] Tirem [el segment] DB. [P 1]

Sigui ▱ FH el paral·lelogram equivalent al triangle △ ABD, construït a l'angle $\widehat{HKF}$ igual a l'angle $\hat{E}$, [Ei 42]
i ▱ GM el paral·lelogram equivalent al triangle △ DBC,
aplicat sobre el segment GH amb l'angle $\widehat{GHM}$ igual a (l'angle) $\hat{E}$. [Ei 44] ♣

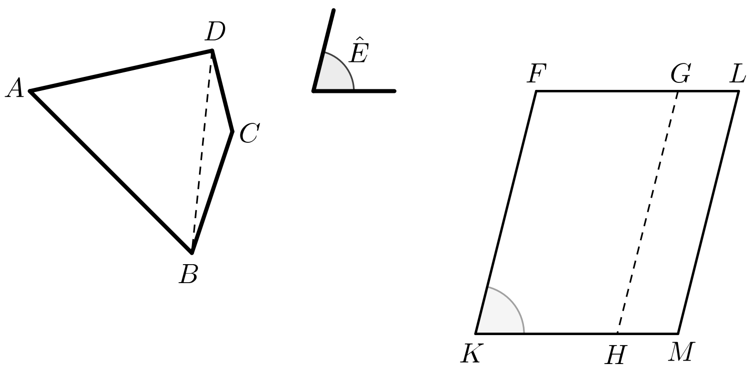


Figura Ei 45

[*Demostració*.] Aleshores, com que l'angle $\hat{E}$ és igual als angles $\widehat{HKF}$ i $\widehat{GHM}$, els angles $\widehat{HKF}$ i $\widehat{GHM}$ són iguals. [Nc 1]

Afegim l'angle $\widehat{KHG}$ a tots dos;
aleshores els angles $\widehat{FKH}, \widehat{KHG}$ [junts] són iguals als angles $\widehat{GHM}$, $\widehat{KHG}$ [junts]. [Nc 2]

Però els angles $\widehat{FKH}$ i $\widehat{KHG}$ [junts] valen dos angles rectes. [Ei 29]

Per tant, els angles $\widehat{KHG}$ i $\widehat{GHM}$ [junts] també els valen. [Nc 1]

---

494. En realitat, és un porisma elemental d'Ei 44, sempre que sigui possible «triangular» la figura poligonal, que és el mètode al qual recorre Euclides. A la figura Ei 45, la triangulació és elemental. Apareix, doncs, el «mètode de triangulació». La qüestió és saber si el mètode de triangulació val amb independència del nombre de costats de la figura poligonal. És clar que si la figura poligonal és convexa, solament cal triar un vèrtex i unir-lo amb tots els altres no contigus. Què passa, però, si la figura poligonal és còncava? Vegeu l'ítem *a* del problema 52 (pàgina 67).

Al punt H del segment GH, hem tirat dos segments KH i HM que no es troben al mateix costat [de GH] però que determinen angles adjacents iguals a dos angles rectes.

Per tant, els segments KH i HM estan alineats. [EI 14]

I, com que el segment HG talla els (segments) paral·lels KH i FG, els angles alterns $\widehat{MHG}, \widehat{HGF}$ són iguals. [EI 29]

Afegim l'angle $\widehat{HGL}$ a tots dos.

Aleshores, els angles $\widehat{MHG}, \widehat{HGL}$ [junts] són iguals als angles $\widehat{HGF}$, $\widehat{HGL}$ [junts]. [Nc 2]

Però els angles $\widehat{MHG}$ i $\widehat{HGL}$ [junts] són iguals a dos angles rectes. [EI 29]

Per tant, els angles $\widehat{HGF}$ i $\widehat{HGL}$ [junts] també ho són. [Nc 1]

Així doncs, FG està alineat amb GL. [EI 14]

I, atès que [els segments] FK i GH són iguals i paral·lels, [EI 34]
i [els segments] HG i ML també, [EI 34]
[els segments] KF i ML són iguals i paral·lels. [EI 30 i Nc 1]

Els segments KM i FL els uneixen [pels extrems].

Per tant, [els segments] KM i FL també són iguals i paral·lels. [EI 33]

En definitiva, ▱ $KFLM$ és un paral·lelogram. [DI 22, nota]

A més, com que els triangles $\triangle\, ABD$ i $\triangle\, DBC$ són equivalents als paral·lelograms ▱ FH i ▱ GM, respectivament,
la figura [poligonal] completa ⬠ $ABCD$ és igual al paral·lelogram complet ▱ $KFLM$. [Nc 2]

Així, el paral·lelogram ▱ $KFLM$ construït és igual a la figura poligonal donada ⬠ $ABCD$, amb l'angle $\widehat{FKM}$ igual a l'angle $\hat{E}$.

I això és el que volíem demostrar. ♠

EI 46. *Volem construir* —ἀναγράφειν ἀπό— *un quadrat sobre un segment donat.*[495]

495. Euclides usa una expressió diferent de la que ha usat a la proposició EI 1, on feia servir la paraula grega συστήσασθαι, que torna a utilitzar a EVI 28 i 29 (Vitrac (1990), p. 280–281). A diferència de la proposició EI 1, la validesa d'aquesta proposició —la seva demostració— depèn de P 5. Ara bé, no està lligada a les darreres proposicions. Hauria pogut establir la proposició darrere d'EI 35 (en realitat, d'EI 34), però aquestes dues proposicions estan íntimament lligades i és normal posar-les l'una darrere l'altra. Aquest resultat anticipa els del llibre IV —la construcció

Sigui AB un segment donat.

Volem descriure un quadrat sobre el segment AB.

[*Construcció.*] Sobre AB i pel punt A,
tirem una perpendicular. [Ei 11]

Fem el segment AD igual a [el segment] AB. [Ei 3]

Per D, tirem [el segment] DE paral·lel a [el segment] AB
i, per B, tirem [el segment] BE paral·lel a [el segment] AD. [Ei 31]

D'això en resulta un quadrat $\square\, ADEB$. ♣

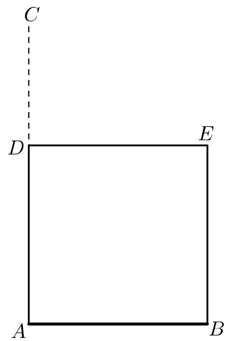


Figura Ei 46

[*Demostració.*] *a*) Els segments AB i DE són iguals
i [els segments] AD i BE també ho són. [Ei 34]

Però [els segments] AB i AD són iguals.

Per tant, els quatre segments BA, AD, DE i EB són iguals. [Nc 1]

En definitiva, el paral·lelogram ▱ $ADEB$ és equilàter. ♠

b) Ara veurem que els seus angles són rectes.

Com que el segment AD talla els segments paral·lels AB i DE,
els angles $\widehat{BAD}$ i $\widehat{ADE}$ són iguals a dos angles rectes. [Ei 29]

Però [, per construcció,] l'angle $\widehat{BAD}$ és recte.

Per tant, l'angle $\widehat{ADE}$ també ho és. [Nc 3]

I, als paral·lelograms, els costats i els angles oposats són iguals [, respectivament]. [P 4 i Ei 34]

Per tant, cadascun dels angles oposats $\widehat{ABE}$ i $\widehat{EDA}$ és recte.

I [la figura] ▭ $ADEB$ és un rectangle. [Di 22] ♠

Però hem vist que aquest rectangle és equiangle.

Per tant, és un quadrat. [P 4 i Di 22]

I l'hem construït sobre el segment AB.

I això és el que volíem demostrar.[496] ♠

---

dels polígons regulars construïbles amb regle i compàs d'acord amb P 1, P 2 i P 3—, però Euclides el situa aquí —com ja ha fet amb Ei 1— perquè el necessita.

496. Una qüestió que Euclides no analitza, però que usa a bastament,

EI 47. *En un triangle rectangle, els quadrats de*[497] *costats els segments que formen l'angle recte*[498] *[junts] equivalen al quadrat de costat el segment que el subtendeix.*[499]
Sigui $\triangle\, ABC$ un triangle rectangle amb l'angle recte $\widehat{BAC}$.

Afirmo que el quadrat de la hipotenusa BC equival als quadrats dels catets BA i AC [junts].

és la següent: «Dos segments són iguals si, i només si, els quadrats que els tenen com a costats són equivalents», de fet, iguals en el sentit de superposables. Tanmateix, aquesta afirmació és un porisma immediat d'EI 4 i EI 41. O bé del fet que un segment perpendicular a un segment donat per un punt és únic. El mateix val per a rectangles —i, avançant-nos al contingut del llibre VI, per a paral·lelograms semblants— de costats iguals. Vegeu l'ítem f_1 del problema 52 (pàgina 67).

497. Omet el verb «construïts sobre».

498. Els «catets».

499. És a dir, la «hipotenusa».

Heus ací el teorema de Pitàgores: «La suma dels quadrats dels catets d'un triangle rectangle —els costats que formen l'angle recte— equival al quadrat de la hipotenusa —l'altre costat, el que s'oposa a l'angle recte.» Com veurem, aquesta propietat —si s'admet P 5— caracteritza l'ortogonalitat dels dos costats corresponents del triangle que la satisfan. És a dir: «Un triangle és rectangle si satisfà el teorema de Pitàgores i l'angle recte subtendeix la hipotenusa.» Aquestes afirmacions són les proposicions EI 47 i 48, les quals constitueixen una cloenda magnífica del llibre I.

Volem posar de manifest que Euclides estableix el «teorema de Pitàgores» per mètode tangram generalitzat, com algunes de les proposicions precedents. Trosseja el quadrat gran —el que ha construït sobre la hipotenusa— en dos rectangles i demostra que cada un dels rectangles equival a un dels quadrats petits —els que ha construït sobre els catets. I ho fa usant, com a intermediaris, triangles adequats i fent servir les proposicions que estableixen la relació que hi ha entre triangles i rectangles amb bases iguals i entre els mateixos paral·lels. Per ell, és un teorema geomètric, en el sentit que no tracta les mesures numèriques sinó directament els objectes geomètrics que hi intervenen —els quadrats. Vegeu la nota 501 (pàgina 150). Tanmateix, el teorema de Pitàgores admet una demostració més simple com a porisma d'EVI 8 que l'obra d'Euclides no conté. Vegeu la nota 506 (pàgina 151).

Aquesta proposició és un autèntic exemple d'elegància i simplicitat. És un text clàssic de lectura molt recomanable perquè ajuda a entendre la importància del fet que una propietat sigui condició necessària i suficient per a establir l'essència definidora d'un objecte, en aquest cas geomètric: del triangle rectangle.

[*Demostració*.] Construïm el quadrat $\square BDEC$ sobre [la hipotenusa] BC i els quadrats $\square GB$ i $\square HC$[500] sobre [els catets] BA i AC.[501] [Ei 46]

Per A, tirem [el segment] AL paral·lel a BD o CE, [Ei 30 i 31] i unim AD i FC. [P 1]

Ara, atès que els angles $\widehat{BAC}$ i $\widehat{BAG}$ són rectes, els dos segments AC i AG, que tenen un extrem al punt A del segment BA i no es troben al mateix costat [del punt], generen angles adjacents iguals a dos angles rectes.

En conseqüència, [els segments] CA i AG estan alineats. [Ei 14]

Per la mateixa raó, BA i AH també ho estan. [Ei 14]

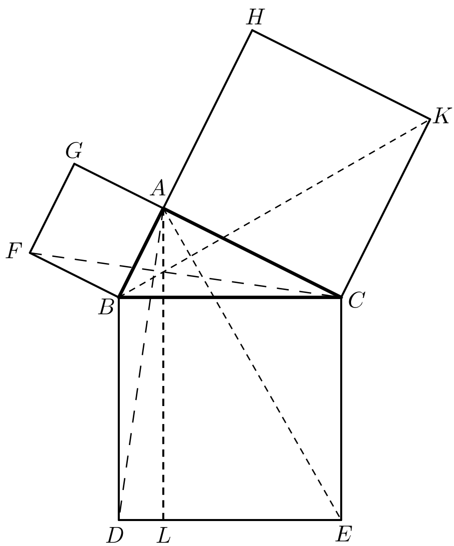


Figura Ei 47

Els angles $\widehat{DBC}$ i $\widehat{FBA}$ són iguals perquè tots dos són rectes. [P 4]

Si afegim, doncs, l'angle $\widehat{ABC}$ a cadascun,
resulta que els angles totals $\widehat{DBA}$ i $\widehat{FBC}$ són iguals. [Nc 2]

Per tant, com que [els segments] DB i FB són iguals a [els segments] BC i BA, respectivament,
els dos costats AB i BD són iguals als dos costats FB i BC [, respectivament,][502]

500. Euclides usa la notació indicada a la nota 484 (pàgina 142). Tanmateix, no hi ha mai confusió: el text sempre és prou clar per a evitar qualsevol ambigüitat.

501. Fixem-nos en l'aspecte eminentment constructiu d'aquesta proposició. En la proposició anterior, ha establert que, donat un segment, podem construir un quadrat que el tingui com un dels costats. Per tant, els quadrats existeixen en tots els casos.

502. Al text grec hi ha una inversió de la correspondència, ja que hi trobem «FB i BC».

i els angles $\widehat{ABD}$ i $\widehat{FBC}$ són iguals.[503]

D'això en resulta que les bases AD i CF,
i els triangles $\triangle\, ABD$ i $\triangle\, FBC$ són iguals. [EI 4]

Ara bé, el paral·lelogram ▱ BL és el doble del triangle $\triangle\, ABD$, ja que tots dos tenen la base BD comuna i es troben entre els mateixos (segments) paral·lels BD i AL. [EI 41]

I el quadrat $\square\, BG$ és el doble del triangle $\triangle\, FBC$,
ja que tenen la base comuna BF i es troben entre els mateixos (segments) paral·lels BF i CG. [EI 41]

[Ara bé, els dobles d'iguals són iguals. [Nc 5′]]

Per tant, el paral·lelogram ▱ BL i el quadrat $\square\, BG$ són equivalents. [Nc 1]

Anàlogament,[504] si unim AE i BK, [P 1]
veiem que el paral·lelogram ▱ CL i el quadrat $\square\, CH$ són equivalents.

En conseqüència, el quadrat sencer $\square\, BDEC$, que es compon dels paral·lelograms BL i CL, és equivalent als dos quadrats $\square\, GB$ i $\square\, HC$. [Nc 2]

Però, els quadrats $\square\, BDEC$, $\square\, GB$ i $\square\, HC$, els hem construït[505] sobre [els segments] BC, BA i AC, respectivament.

En definitiva, el quadrat de costat la hipotenusa BC és equivalent als quadrats de costats els catets BA i AC [junts].

I això és el que volíem demostrar.[506] ♠

---

503. Val la pena fixar-se en el fet que Euclides usa indistintament AB i BA per a designar un mateix segment, i $\widehat{FBC}$ i $\widehat{CBF}$ per a designar un mateix angle. El vèrtex, però, és la lletra del mig en tots els casos. Vegeu les notes 272 i 376 (pàgines 88 i 111, respectivament).

504. El raonament és exactament el mateix.

505. Recordem que Euclides diu «l'hem descrit», però ens sembla més clar dir «l'hem construït».

506. Voldríem insistir en el mètode tangram usat per Euclides. D'una banda, descompon el quadrat gran $\square\, BE$ en dos rectangles determinats per la prolongació AL de la perpendicular de A sobre la hipotenusa BC, i obté dos rectangles ▭ BL i ▭ CL. I veu que aquests rectangles equivalen a dues vegades els triangles $\triangle\, ABD$ i $\triangle\, ACE$, respectivament. Però, d'altra banda, els quadrats $\square\, AF$ i $\square\, AK$ també són dues vegades els triangles $\triangle\, ABD$ i $\triangle\, ACE$, respectivament. I resulta que aquestes són,

EI 48. *Si, en un triangle, el quadrat d'un dels costats és equivalent als quadrats dels altres dos costats [junts], l'angle que formen aquests dos costats és recte.*[507]

Suposem que, al triangle $\triangle ABC$, el quadrat de costat BC equival als quadrats de costats AB i AC.[508]

Afirmo que l'angle $\widehat{BAC}$ és recte.

[*Demostració.*] Per a veure-ho, pel punt A tirem la perpendicular AD al segment AC,[509] [EI 11]

fem AD igual a AB [EI 2]

i unim DC. [P 1]

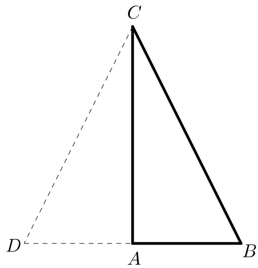


FIGURA EI 48

Atès que [els segments] AD i AB són iguals,

els quadrats de costats AD i AB són equivalents, respectivament.[510]

Afegim el quadrat de costat AC a cadascun.

D'això en resulta que els quadrats de costats AD i AC són equivalents als quadrats de costats AB i AC. [Nc 2]

Però el quadrat de costat CD és equivalent als quadrats de costats AD i AC [junts] perquè l'angle $\widehat{CAD}$ és recte. [EI 47]

I, per hipòtesi, el quadrat de costat BC és equivalent als quadrats de costats AB i AC [junts].[511]

---

precisament, les peces del trencadís tangram. Quanta elegància i genialitat!

Aquesta demostració és preeudoxiana i evita la teoria de la proporció.

507. És el recíproc de l'anterior i, per tant, el «teorema de Pitàgores» caracteritza el triangle rectangle, és a dir, serveix per a definir-lo.

508. Euclides usa la nomenclatura «costats» per als «catets». L'altre costat, «la hipotenusa», l'anomena «l'altre costat» o «el costat que queda». Nosaltres, però, com hem procedit fins ara, usarem la nomenclatura que fa el text més aclaridor: «catets» i «hipotenusa», respectivament.

509. Caldria dir «de l'altre costat», perquè si no, s'haurien de distingir els casos: *a*) AD cau dins del triangle $\triangle ABC$ donat, o *b*) AD cau fora. El que fa Euclides simplifica la figura EI 48 però no és essencial. Per què?

510. Vegeu la nota 496 (pàgina 148).

511. Sempre és un bon exercici, fixar-se en quin punt i de quina manera s'usen les hipòtesis, tant les generals —els postulats— com les que s'inclouen en l'enunciat de la proposició. Totes són «elements» centrals i indispensables de la demostració.

Per tant, el quadrat de costat CD és igual al quadrat de costat BC [Nc 1 i 2]

i, en conseqüència, els costats CD i BC són iguals.[512]

Aleshores, com que [els segments] AD i AB són iguals, i [el segment] AC és comú,

els dos costats AD i AC són iguals als dos costats AB i AC, respectivament,

i les bases CD i BC són iguals.

En definitiva, els angles $\widehat{CAD}$ i $\widehat{CAB}$ són iguals. [Ei 8]

Però l'angle $\widehat{CAD}$ és recte.

Per tant, l'angle $\widehat{CAB}$ també ho és. [Nc 1]

I això és el que volíem demostrar. ♠

A.1.2 Llibre segon: Eii

Comentaris al llibre ii. El llibre ii tracta del que actualment s'anomena «geometria algebritzada». Algú prefereix usar el terme «àlgebra geometritzada»; però aquesta expressió, pròpia de la matemàtica més oriental, no ens sembla adequada,[513] ja que el mètode numèric no és, en absolut, el que s'usa als *Elements* per a resoldre les qüestions de geometria. p. 32

En termes geomètrics, el llibre conté el que, en termes numèrics, coneixem com a «identitats algèbriques».[514] Entre al-

512. Aquí Euclides usa el fet següent: «Si dos quadrats són iguals, els costats també ho han de ser.» Vegeu la nota 496 (pàgina 148).

513. A la primera part de la *Història* —la matemàtica egípcia i mesopotàmica, Pla (2016*b*)—, hem vist que resolien els problemes geomètrics com si fossin aritmètics, de forma numèrica amb tècniques algèbriques, si bé aquest concepte encara no s'havia creat i s'hauria d'esperar força temps perquè es creés.

514. De fet, s'estableixen amb la metodologia del tangram generalitzat, que consisteix a «constatar l'equivalència de superfícies formades amb peces de formes diverses però de la mateixa superfície», és a dir, peces equivalents no necessàriament superposables.

És una metodologia que ja ha usat abans al llibre i; per exemple, a Ei 35 i Ei 47.

tres resultats, s'hi estableix l'equivalència —amb el tangram— d'un quadrat el costat del qual és la suma[515] o la diferència de dos segments, o d'un rectangle de costats la suma i la diferència de dos segments.[516]

D'aquests primers resultats d'índole tècnica, se'n dedueixen uns altres de molt més interessants per a la concepció geomètrica grega; per exemple, l'aplicació d'una superfície donada en un segment donat «per excés» —tècnicament, «en hipèrbola» (ὑπερβολή) —, o «per defecte» —tècnicament, «en el·lipse» (ἔλλειψις).[517]

La lectura algèbrica d'aquesta tècnica, que arribarà a Occident a través de la matemàtica àrab, correspon a la «resolució d'equacions de segon grau». Al llibre II es resol el problema se-

515. Vegeu EII 4.

516. D'acord amb la mentalitat grega, en les expressions següents, expressades amb terminologia algèbrica, hem d'entendre que $a, b, c, \ldots$ abreugen els segments $AB, CD, EF, \ldots$, perquè la geometria grega no tracta de les mides (nombres) dels objectes geomètrics sinó dels segments i les superfícies (els objectes geomètrics en si mateixos). Així ho expressarem i ho entendrem en cada una de les proposicions concretes [EII $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ i 10]. Ara bé, si pensem $a, b, c, \ldots$ com si fossin nombres, el que fem és apropar-nos a la mentalitat algèbrica d'arrel àrab. En síntesi, aquestes deu proposicions enuncien i demostren els lligams següents entre superfícies de quadrats i rectangles:

EII 1. $m\,(a+b+c+\ldots) = m\,a + m\,b + m\,c + \ldots$

EII 2. $(a+b)\,a + (a+b)\,b = (a+b)^2$.

EII 3. $(a+b)\,b = a\,b + b^2$.

EII 4. $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2\,a\,b$.

EII 5. $a\,b + \left(\frac{a+b}{2} - b\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, o bé $(\alpha+\beta)\,(\alpha-\beta) = \alpha^2 - \beta^2$.

EII 6. $(2\,a+b)\,b + a^2 = (a+b)^2$, o bé $(\alpha+\beta)\,(\alpha-\beta) = \alpha^2 - \beta^2$.

EII 7. $(a+b)^2 + a^2 = 2\,(a+b)\,a + b^2$, o bé $\alpha^2+\beta^2 = 2\,\alpha\,\beta + (\alpha-\beta)^2$.

EII 8. $4\,(a+b)\,a + b^2 = ((a+b)+a)^2$, o bé $4\,\alpha\,\beta + (\alpha-\beta)^2 = (\alpha+\beta)^2$.

EII 9. $a^2 + b^2 = 2\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2} - b\right)^2\right)$, o bé $(\alpha+\beta)^2 + (\alpha-\beta)^2 = 2\,(\alpha^2+\beta^2)$.

EII 10. $(2\,a+b)^2 + b^2 = 2\left(a^2 + (a+b)^2\right)$, o bé $(\alpha+\beta)^2 + (\alpha-\beta)^2 = 2\,(\alpha^2+\beta^2)$.

517. Recordem que, en la proposició EI 44, hem vist l'aplicació «justa» o, tècnicament, «en paràbola» (παραβολή). Vegeu la pàgina 143.

güent: «Doneu un segment i una superfície (poligonal),[518] i apliqueu, al segment donat, un rectangle que tingui la mateixa superfície que la superfície donada; però feu-ho de manera que un dels costats no abraci tot el segment o en sobresurti.»[519] En la mentalitat grega, cal determinar, doncs, un punt del segment donat o de la seva prolongació usant solament segments rectilinis i circumferències,[520] les úniques eines de construcció permeses als *Elements*.

En aquest llibre també es resol el problema que consisteix a «dividir un segment en mitjana i extrema raó».[521] S'hi demostra el teorema «general» de Pitàgores o «teorema del cosinus», és a dir, el lligam que hi ha entre els quadrats de dos costats d'un triangle arbitrari i el quadrat del tercer.[522] I, per fi, a EII 14 s'estableix que «qualsevol superfície rectilínia és quadrable».

Observem, doncs, que el llibre II —com el primer— posa fi a un dels problemes plantejats en l'escola pitagòrica: la «quadratura de les figures poligonals».[523] És curiós observar que les dues definicions que s'hi ofereixen ja han aparegut, explícitament la primera i implícitament la segona, al llibre I.[524] I, encara més: a la proposició EI 44,[525] en què Euclides basteix un parallelogram amb un angle donat equivalent a un triangle donat, en construir-lo mostra l'«existència» del paral·lelogram i ho fa

518. Usarem, indistintament, els termes «superfície» i «àrea» —llevat de l'expressió ja clàssica «aplicació d'àrees». Entenem que el terme «àrea» té un component més aritmètic (numèric) que no pas «superfície» (que el té més geomètric) —vegeu les entrades corresponents al DIEC (1995)—, però, en la mentalitat geomètrica grega, també hi ha vegades en què es parla de la superfície com a objecte i unes altres en què es concep com a «extensió» concreta, o sigui, com a «àrea».

519. Vegeu EII 5 i 6.

520. Col·loquialment, diem «usant regle i compàs».

521. Vegeu EII 11.

522. Vegeu EII 12 i 13.

523. PLA (2016*c*), ítem *e*, p. 139 i 144, respectivament.

524. Vegeu les notes 530 i 533 (pàgines 156 i 157, respectivament).

525. Vegeu la nota 517 (pàgina 154).

amb l'aplicació en paràbola, és a dir, determinant la quarta proporcional de tres segments donats de manera implícita.[526]

A més, aquest llibre deixa ben clares tres coses: que està íntimament lligat al llibre I, que respecta l'ordre històric de les proposicions i que evita la teoria de la proporció usant, sempre que pot, el mètode tangram (tant en els problemes com en els teoremes). Per aquesta raó, conté resultats que retrobarem al llibre VI, que,[527] usant la teoria de la proporció i el teorema de Tales, generalitza l'aplicació d'àrees i mostra que es poden construir les tres aplicacions: en paràbola, en el·lipse i en hipèrbola; estableix l'existència de la tercera, la quarta i la mitjana proporcional, i la mitjana i extrema raó; i proporciona els elements necessaris per a generalitzar el teorema de Pitàgores.[528]

El llibre II és el més breu de tots.[529] Solament conté dues definicions i catorze proposicions.

p. 32 A.1.2*a* Les definicions d'EII (Ὅροι)

DII 1. Tot paral·lelogram rectangular[530] *està contingut* —περιέχεσθαι— en dos dels segments rectilinis que formen l'angle recte.[531]

526. De forma explícita, però, ho fa a EVI 12 i dins la geometria euclidiana, és a dir, usant P 5. Ens podem preguntar si, de fet, hi estableix, també, de forma implícita, el teorema de Tales, que històricament s'hauria de col·locar en aquesta primera part de l'obra. Vegeu el problema 37 (pàgina 65).

527. El teorema de Pitàgores també es pot obtenir, d'una manera aparentment més simple, amb la teoria de la proporció (nota 499, pàgina 149).

528. Estableix un resultat trigonomètric: el teorema del cosinus.

529. Podria haver estat incorporat al llibre I, però hi ha dues raons per a no fer-ho. La primera, d'ordre pràctic: no fer el llibre I excessivament pesat, ja que és el més llarg després del X. La segona, d'ordre metodològic, és molt més interessant i ja l'hem indicat abans: tancar el llibre I amb el teorema de Pitàgores. Vegeu la nota 499 (pàgina 149).

530. Aquest terme que ara anomena παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον ja l'havia definit a DI 22 amb l'expressió ἑτερόμηκες.

531. Malgrat que Euclides diu «el rectangle contingut en A i BC» —ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν $A, B\Gamma$ περιεχονένον ὀρθογώνιον—, nosaltres parlarem

Dɪɪ 2. En tota superfície paral·lelogramàtica,[532] qualsevol paral·lelogram al voltant de la diagonal —διάμετρος— més els dos complements s'anomena *gnòmon* —γνώμων.[533]

A.1.2*b* Les proposicions d'Eɪɪ p. 32

[*La geometria algebritzada*]

Eɪɪ 1. *Si tenim dos segments i un es divideix en un cert nombre de parts* [*subsegments*],[534] *el rectangle format pels dos segments* [*donats*] *és equivalent al rectangle format pel segment íntegre i cada una de les parts* [*del segment dividit*].[535]
Siguin A i BC els dos segments donats.[536]

---

del «rectangle format o determinat per A i BC» o, millor encara, com es fa actualment, del «rectangle de costats A i BC» o, encara més simple, del «rectangle A, BC», amb el benentès que tots dos costats són perpendiculars. Hi ha autors que ho simbolitzen amb el producte i escriuen $A \times BC$. Nosaltres preferim simbolitzar-ho, si s'escau, pel «rectangle $\square\,(A, BC)$».

532. Es tracta d'un «paral·lelogram». Farem servir aquest terme usualment, malgrat que Euclides s'hi refereixi amb l'expressió «superfície o figura paral·lelogramàtica», παραλληλογράμμου χωρίου.

533. Aquest concepte l'ha introduït, de forma indirecta, al «teorema del gnòmon», a Eɪ 43.

Segons Heròdot, els grecs heretaren aquest concepte dels mesopotàmics. Vegeu Pʟᴀ (2016*c*), p. 372.

534. Més endavant (als llibres ᴠ i ᴠɪɪ), l'expressió «parts» adquireix un significat propi. Però, en general, usada col·loquialment, no provoca cap malentès. Per tant, la usarem així quan calgui per a evitar l'expressió «subsegment». En tot cas, aquests subsegments o parts comparteixen amb el segment original un extrem. L'altre extrem és interior al segment.

535. S'hi estableix, *more geometricum*, la distributivitat del producte damunt la suma.

Val la pena observar que Euclides no usa mai aquesta proposició. Heath ofereix un camí alternatiu per a les demostracions. Vegeu Hᴇᴀᴛʜ (1925), volum ɪ, p. 377, i també la nota 539 (pàgina 159).

536. Observem que, novament, Euclides usa una sola lletra —en aquest cas, la A— per a designar un segment. I ho fa quan no li cal recórrer als extrems del segment. Vegeu la nota 285 (pàgina 91).

Considerem que hem tallat [el segment] BC pels punts arbitraris D i E.

Afirmo que el rectangle format pels (segments) A i BC és equivalent als rectangles de costats A i BD, A i DE, i A i EC [junts].[537] [*Construcció.*] Per B, tirem el segment BF perpendicular a BC. [Ei 11]

Sigui BG igual a A. [Ei 3]

Per G, tirem GH paral·lel a BC,

i, finalment, per D, E i C, tirem DK, EL i CH paral·lels a BC. [Ei 31] ♣

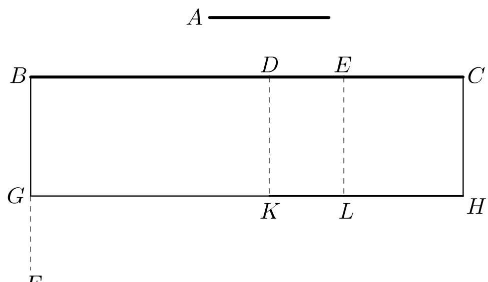


Figura Eii 1

[*Demostració.*] Aleshores, el rectangle $\square\, BH$ és equivalent als [rectangles] $\square\, BK$, $\square\, DL$ i $\square\, EH$ [junts], [Dii 1]

i [el rectangle] $\square\, BH$ té els costats A i BC, ja que, d'una banda, està format per BG i BC i, d'una altra, [el segment] BG és igual a [el segment] A.[538]

Però $\square\, BK$ és el rectangle de costats A i BD,

ja que està format pels costats BG i BD, i BG és igual a A.

I el rectangle $\square\, DL$ és el de costats A i DE, atès que DK és [igual a] BG, [Ei 34]

que és igual a A.

Anàlogament, $\square\, EH$ és el rectangle de costats A i EC.

Per tant, el rectangle de costats A i BC és igual als rectangles de costats A i BD, A i DE, i A i EC [junts]. [Nc 1]

I això és el que volíem demostrar. ♠

---

537. Formalment, $\square(A, BD + DE + EC) = \square(A, BD) + \square(A, DE) + \square(A, EC)$ o, expressat d'una altra manera, $A \times (BD + DE + EC) = A \times BD + A \times DE + A \times CE$.

538. Euclides no diu enlloc que els rectangles amb un costat comú i l'altre igual són equivalents. Ara bé, podem recórrer naturalment a Ei 35, o bé podem descompondre cadascun dels rectangles en dos triangles rectangles i constatar que els triangles rectangles respectius són iguals [Ei 4 i Nc 2].

EII 2. *Si un segment es talla arbitràriament [en dos], els rectangles que forma el segment donat amb cadascuna de les parts [junts] equivalen al quadrat construït sobre el segment donat [sencer].*[539]

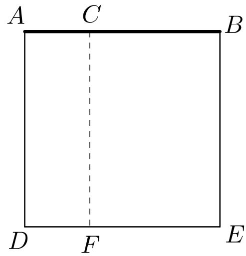


FIGURA EII 2

Sigui C un punt arbitrari que talla el segment AB.

Afirmo que el rectangle de costats AB i BC més el rectangle de costats AB i AC és equivalent al quadrat de costat AB.[540]

[*Demostració.*] Siguin $\square\, ADEB$ el quadrat de costat AB, [EI 46]
i CF el [segment] paral·lel a un [dels segments] AD, BE per C. [EI 30 i 31]

D'això en resulta que [el quadrat] $\square\, AE$ és equivalent a [els rectangles] ▭ AF i ▭ CE [junts].

Però $\square\, AE$ és el quadrat de costat AB;
▭ AF és el rectangle de costats AB i AC, ja que té els costats AD i AC, i AD és igual a AB. [DII 1]

A més, ▭ CE és el rectangle de costats AB i BC, ja que BE és igual a AB.[541]

Per tant, el rectangle de costats BA i AC juntament amb el rectangle de costats AB i BC és igual al quadrat $\square\, AB$. [DII 1]
I això és el que volíem demostrar. ♠

EII 3. *Si un segment es talla arbitràriament [en dues parts], el rectangle format pel segment sencer i una de les parts és equivalent al rec-*

539. És un porisma immediat de l'anterior, ja que les dues parts del segment donat [juntes] donen el segment donat. I, aleshores, el rectangle «suma» és un quadrat. Però Euclides en fa una demostració *ad hoc*. A més, implícitament, ja l'ha usat en la proposició EI 47, en què el quadrat de la hipotenusa queda trencat en dos rectangles determinats per la prolongació de la perpendicular de l'angle recte a la hipotenusa.

540. Formalment, $AB^2 := AB \times (AC + BC) = AB \times AC + AB \times BC$. De fet, apliquem EII 1 al (segment donat) AB i (als seus talls) AC i CB. Així obtenim el rectangle total $\square\, AE$. Només hem de veure que els segments AC i CB junts són iguals al segment AB, cosa que és immediata per la naturalesa del punt C. La definició DI 22 acaba la demostració.

541. Vegeu la nota 538 (pàgina 158).

tangle format per les [*dues*] *parts juntament amb el quadrat de la part* [*considerada abans*].

Sigui C un punt arbitrari que talla el segment AB.

Afirmo que el rectangle de costats AB i BC és equivalent al rectangle de costats AC i BC juntament amb el quadrat de [costat] BC.[542]

[*Demostració.*] Considerem el quadrat □ $CDEB$ de costat BC, [EI 46] i prolonguem ED fins a F.[543] [P 2 i 5]

I, per A, tirem [el segment] AF paral·lel al [segment] CD o al BE. [EI 30 i 31]

D'això en resulta que [el rectangle] ▭ AE és igual al [rectangle] ▭ AD i [el quadrat] □ CE [junts]. [EII 1]

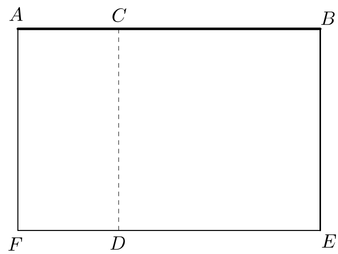


FIGURA EII 3

Ara bé, el rectangle ▭ AE és el rectangle de costats AB i BC, ja que està determinat pels costats AB i BE, i [els segments] BE i BC són iguals. [DII 1]

Però el quadrat □ BD s'ha construït sobre [el segment] BC, el rectangle ▭ AD és el rectangle de costats AC i BC, i [els segments] CD i BC són iguals.

Per tant, el rectangle de costats AB i BC és igual al de costats AC i BC juntament amb el quadrat de costat BC. [Nc 1 i 2]

I això és el que volíem demostrar. ♠[544]

EII 4. *Si un segment es talla arbitràriament* [*en dos*], *el quadrat sobre el segment sencer equival als quadrats de costats cada una de les parts* [*del segment*] *i dues vegades el rectangle determinat per aquests dos segments* [*junts*].[545]

Sigui C un punt arbitrari del segment AB.

---

542. Formalment, $AB \times BC = (AC + BC) \times BC = AC \times BC + BC^2$.

543. En realitat, DF és igual a AC, que està determinat.

544. És curiosa aquesta demostració. Hauria estat millor considerar el rectangle ▭ AE, dividir-lo en dues parts amb el segment paral·lel CD a AF o BE i aplicar EII 1.

545. El text grec diu: «El rectangle contingut en els segments dues vegades.» Vegeu HEATH (1925), volum I, p. 380, nota 2.

Afirmo que el quadrat de costat AB equival als quadrats de costats AC i BC juntament amb el rectangle de costats AC i BC dues vegades.[546]

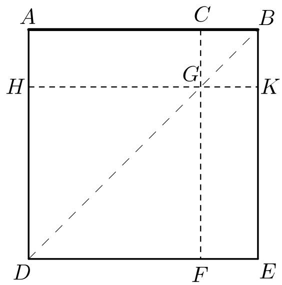


Figura Eii 4

[*Demostració.*] Considerem el quadrat $\square\, ADEB$ de costat [el segment] AB. [Ei 46]

Unim BD. [P 1]

Pel punt C [del segment AB] tirem el [segment] CF paral·lel a AD o EB,
i pel punt G [del segment CF][547]
el paral·lel HK a AB o DE. [Ei 30 i 31]

a) Aleshores, com que CF és [un segment] paral·lel a AD i [el segment] BD els talla tots dos, l'angle extern $\widehat{CGB}$ és igual a l'intern oposat $\widehat{ADB}$. [Ei 29]

Però els angles $\widehat{ADB}$ i $\widehat{ABD}$ són iguals, ja que els costats AD i AB [del triangle $\triangle\, BAD$] són iguals. [Ei 5]

Per tant, els angles $\widehat{CGB}$ i $\widehat{GBC}$ són iguals[548] [Nc 1]
i, de retruc, els costats CB i CG també ho són. [Ei 6]

Però [els segments] CB i CG són iguals a [els segments] GK i KB, respectivament. [Ei 34]

Per tant, [els segments] GK i KB també són iguals [Nc 1]
i el quadrilàter $CGKB$ és equilàter.

b) Afirmo que [el quadrilàter $CGKB$] també és un rectangle.

Atès que [els segments] CG i BK són paral·lels [i el segment CB els talla],
els angles $\widehat{KBC}$ i $\widehat{GCB}$ són iguals a dos angles rectes. [Ei 29]

Però [, per construcció,] l'angle $\widehat{KBC}$ és recte.

Per tant, l'angle $\widehat{BCG}$ també ho és.

I, així, els angles oposats $\widehat{CGK}$ i $\widehat{GKB}$ també ho són. [P 4 i Ei 34]

En conseqüència, [el quadrilàter] $CGKB$ és un rectangle. [Dii 1]

Però hem vist que també és equilàter.

546. Formalment, $AB^2 = (AC + BC)^2 = AC^2 + BC^2 + 2\, AC \times BC$.

547. El punt G és el punt on es tallen els segments BG i CF, perquè, per P 5, (els segments) CF, BD ho fan efectivament.

548. Fixem-nos que Euclides usa dos noms, $\widehat{ABD}$ i $\widehat{GBC}$, per a designar un mateix angle, cosa que dificulta la lectura i la comprensió del text.

Per tant, és un quadrat de costat CB. [Di 22]

Per la mateixa raó, $\square HF$ també és un quadrat de costat HG, que és igual a AC. [Ei 34]

En definitiva, els quadrats $\square FH$ i $\square CK$ són els quadrats de costats AC i CB. ♠

Ara bé, com que els rectangles ▭ AG i ▭ GE són iguals, [Ei 43] i [el rectangle] ▭ AG és el rectangle [de costats] AC i CB, ja que CG és igual a CB,

tenim que el rectangle ▭ GE també és igual al de costats AC i CB.

En conseqüència, els rectangles ▭ AG i ▭ GE són iguals al rectangle de costats AC i CB dues vegades.

Però els quadrats $\square HF$ i $\square CK$ també són els quadrats de costats AC i CB.

En definitiva, les quatre superfícies $\square HF$, $\square CK$, ▭ AG i ▭ GE[549] [juntes] són equivalents als quadrats de costats AC i CB juntament amb el rectangle de costats AC i CB dues vegades [tots junts].

Però [les figures] $\square HF$, $\square CK$, ▭ AG i ▭ GE [juntes][550] formen [el quadrat] $\square ADEB$, que és el quadrat de costat AB.

Per tant, el quadrat de costat AB és igual als quadrats de costats AC i CB i el rectangle de costats AC i CB dues vegades. [Nc 1 i 2]

I això és el que volíem demostrar. ♠[551]

Eii 4, porisma. *Els paral·lelograms a l'entorn de la diagonal d'un quadrat són quadrats.* ♠

Eii 5. *Si un segment es talla en dues parts iguals i* [*en dues parts*] *diferents, el rectangle format per les parts diferents del segment* [*inicial*] *juntament amb el quadrat determinat pel segment d'extrems els*

549. El text grec diu «figures», però és més clar dir «superfícies», amb el benentès que s'usa l'equivalència de la superfície geomètrica però en cap cas de la numèrica.

550. Euclides fa un ús explícit del mètode tangram, que estableix que les dues superfícies —fetes amb peces diferents— són iguals. De fet, estableix una equivalència de superfícies.

551. Aquesta proposició té, com a porisma, la proposició següent: «La superfície d'un quadrat de costat el doble d'un segment donat equival a quatre vegades la superfície del quadrat de costat el segment donat.» En aquest cas particular, s'evita recórrer a Evi 19 i 20.

dos punts que determinen les seccions —τομή— *és equivalent al quadrat de costat la meitat* [*del segment inicial*].[552]

Sigui C el punt que divideix el segment AB en dues parts iguals [Eɪ 10] i D el punt que el divideix en dues de diferents.

Afirmo que el rectangle determinat per AD i DB juntament amb el quadrat de costat CD és equivalent al quadrat de costat CB.[553]

[*Demostració*.] Considerem el quadrat $\square CEFB$ de costat CB [Eɪ 46] i unim BE. [P 1]

Per D i H, [P 5] tirem els segments DG i KM paral·lels a [els segments] CE o BF, i AB o EF, respectivament, i, pel punt A, el segment AK paral·lel a [els segments] CL o BM. [Eɪ 30 i 31]

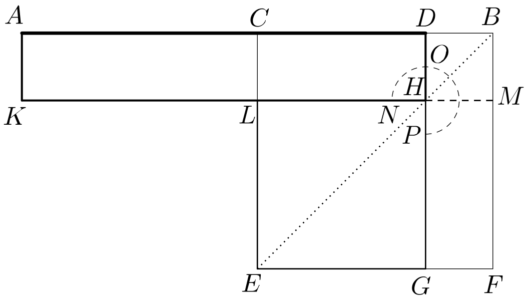


Figura Eɪɪ 5

Atès que els complements ▭ CH i ▭ HF són equivalents, [Eɪ 43][554] si afegim el quadrat $\square DM$ [a cadascun],

aleshores els [rectangles] totals ▭ CM i ▭ DF són equivalents. [Nc 2]

Però els rectangles ▭ CM i ▭ AL també ho són, ja que [els segments] AC i CB són iguals. [Eɪ 36]

Per tant, els rectangles ▭ AL i ▭ DF són equivalents. [Nc 1]

Afegim el rectangle ▭ CH a cadascun.

D'això en resulta que el [rectangle] total ▭ AH és igual al gnòmon ⌝ NOP.[555] [Dɪɪ 2 i Nc 2]

552. Aquesta proposició és important, ja que és un «element» de l'«aplicació per defecte» d'una àrea donada en un segment donat. En mans d'Apol·loni, l'aplicació d'àrees es converteix en una eina bàsica per a la classificació de les còniques.

553. Formalment, $(AC + CD) \times DB + CD^2 = (AC + CD) \times (CB - CD) + CD^2 = (AC + CD) \times (AC - CD) + CD^2 = CD^2 = AC^2 = CB^2$. O, equivalentment, $(AC + CD) \times (AC - CD) = AC^2 - CD^2$.

554. El teorema del gnòmon, Eɪ 43, fa aquí un paper central.

555. Euclides designa el gnòmon amb les tres lletres del segment de cir-

Però el rectangle $\square AH$ està determinat pels costats AD i DB perquè [els segments] DH i DB són iguals. [DII 1]

Per tant, el gnòmon $\urcorner NOP$ també és equivalent al rectangle de costats AD i DB. [Nc 1]

Afegim, a cadascun, [el quadrat] $\square LG$, [EII 4, porisma] que equival al quadrat de costat CD.

Aleshores, el gnòmon $\urcorner NOP$ i el quadrat $\square LG$ [junts] són equivalents al rectangle determinat per [els segments] AD i DB i el quadrat de costat CD [junts]. [Nc 2]

Però el gnòmon $\urcorner NOP$ i el quadrat $\square LG$ formen el quadrat $\square CEFB$, que és el [quadrat] de costat CB.

En definitiva, el rectangle de costats AD i DB més el quadrat de costat CD equival al quadrat de costat CB. [Nc 1 i 2]

I això és el que volíem demostrar.[556] ♠

EII 6. *Si un segment es talla en dues parts iguals i es prolonga un segment, el rectangle contingut pel segment total [inicial] més l'afegit i pel segment afegit juntament amb el quadrat de la meitat [del segment donat] és igual al quadrat de costat la meitat del segment donat més l'afegit [junts].*

Siguin C el punt que divideix el segment AB en dues parts iguals [EI 10]

---

cumferència que té a l'interior. De fet, és la figura poligonal rectilínia $\urcorner NOP = ⬠ CLHGFB := \square CH + \square DF$.

556. Fixem-nos en el fet algèbric següent: si fem $AB := a, DB := x$ i el gnòmon $\urcorner NOP := b^2$, resulta que $a\,x - x^2 = \square AH = b^2 =$ gnòmon $\urcorner NOP$.

És a dir, aquesta proposició, que és un teorema, amaga una eina implícita que resol el problema següent: donada una superfície b^2 i un segment a, podem determinar el segment x que satisfà la igualtat anterior (amb regle i compàs). Solament cal recórrer al teorema de Pitàgores. Sigui AB un segment de longitud a. Determinem el punt C que el dimidia. Pel punt C aixequem una perpendicular CE a AB, de longitud $\frac{1}{2}\,a$. Ara, damunt CE i amb l'extrem C, determinem un segment CO de longitud b —atès que es suposa que la superfície donada és quadrable, és a dir, que es pot expressar amb la forma b^2. Per O i amb radi $AC := \frac{1}{2}\,a$, tirem una circumferència que talla el segment AB en dos punts D i D' (podem fer la figura descrita). De tot això en resulta que DB té la longitud x buscada.

i BD el segment que prolonga AB. [P 2]

Afirmo que el rectangle de costats els segments AD i DB juntament amb el quadrat de costat CB és igual al quadrat de costat CD.[557]

[*Demostració.*][558] Sigui $\square CEFD$ el quadrat de costat CD. [EI 46]

Unim DE. [P 1]

Pels punts B i H [P 5] tirem els segments BG i KM paral·lels a [els segments] EC i DF, i a [els segments] AB i EF, respectivament. [EI 30 i 31]

I, pel punt A, tirem el segment AK paral·lel a [els segments] CL i DM. [EI 30 i 31]

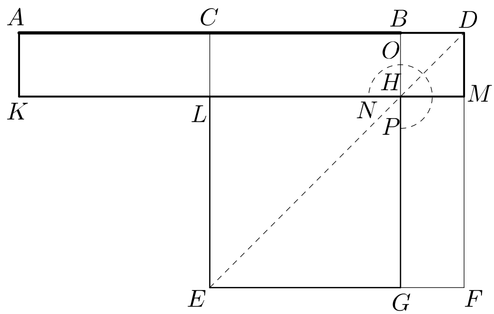


FIGURA EII 6

Aleshores, com que [els segments] AC i CB són iguals, els rectangles $\square AL$ i $\square CH$ són equivalents. [DII 1 i EI 36]

Però també ho són els rectangles $\square CH$ i $\square HF$. [EI 43]

Per tant, els rectangles $\square AL$ i $\square HF$ també ho són. [Nc 1]

Ara afegim el rectangle $\square CM$ a cadascun.

Obtenim que el [rectangle] total $\square AM$ equival al gnòmon $\urcorner NOP$. [DII 2]

Però el rectangle $\square AM$ és el rectangle de costats AD i DB perquè [els segments] DM i DB són iguals.

Per tant, el gnòmon $\urcorner NOP$[559] també és igual al rectangle de costats AD i DB. [Nc 1]

Afegim el quadrat $\square LG$, [EII 4, porisma] que és equivalent al quadrat de costat CB, a cadascun.

Aleshores, el rectangle de costats AD i DB i el quadrat de costat CB [junts] són equivalents al gnòmon $\urcorner NOP$ i el quadrat $\square LG$ [junts]. [Nc 2]

557. Formalment, $AD \times BD + BC^2 = (AB + BD) \times BD + BC^2 = CD^2 = (CB + BD)^2$. O sigui, $CD^2 - BC^2 = (BC + CD)(BC - CD)$.

558. És, *mutatis mutandis*, la demostració anterior.

559. Vegeu la nota 555 (pàgina 163).

Però el gnòmon ⅂ NOP i el quadrat □ LG junts formen el quadrat □ $CEFD$, que és el quadrat de costat CD.

En definitiva, el rectangle determinat pels segments AD i DB juntament amb el quadrat de costat CB equival al quadrat de costat CD.[560] [Nc 1 i 2]

I això és el que volíem demostrar.[561] ♠

Eii 7. *Tallem un segment per un punt arbitrari. El quadrat de costat el segment donat i el quadrat de costat una de les parts determinades pel punt* [*de tall*] *equivalen a dues vegades el rectangle format pel segment donat i la part suara indicada més el quadrat de l'altra part.*[562]

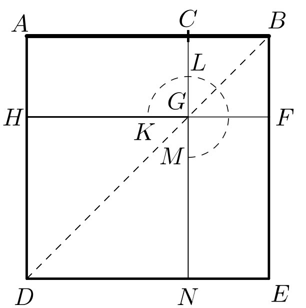


Figura Eii 7

Sigui C un punt que divideix el segment AB en dues parts arbitràries.

Afirmo que els quadrats de costats AB i BC equivalen a dues vegades el rectangle determinat per AB i BC juntament amb el quadrat de costat CA.[563]

[*Demostració*.] Sigui □ $ADEB$ el quadrat descrit sobre AB. [Ei 46]

Completem la figura.[564]

Aleshores, com que els rectangles ▭ AG i ▭ GE són equivalents, [Ei 43]

---

560. Vegeu la nota 550 (pàgina 162).

561. Fixeu-vos en la nota 556 (pàgina 164) i observeu que es tracta d'un problema semblant. Però ara l'aplicació és per excés, cosa que es tradueix en el fet algèbric següent: si fem $AB := a, DB := x$ i el gnòmon ⅂ $NOP := b^2$, aleshores $a\,x + x^2 =$ ▭ $AH =$ gnòmon ⅂ $NOP = b^2$. Ara també podem trobar la solució de les equacions quadràtiques de la forma $a\,x + x^2 = b^2$ amb regle i compàs.

562. Euclides proporciona l'expressió del quadrat de la diferència de dos segments.

563. Formalment, $AB^2 + BC^2 = 2\,AB \times BC + AC^2$. És a dir, $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\,AB \times BC = (AB - BC)^2$.

564. Diu καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. Ni en aquesta proposició ni en la següent s'entreté a explicar-nos la manera de completar la figura; ens remet a la comprensió de les dues proposicions anteriors. Tanmateix, en la proposició següent diu καταγεγράφθω διπλοῦν τὸ σχῆμα, és a dir, «completada doblement».

si els afegim el quadrat $\square\, CF$, [EII 4, porisma]
obtenim que els rectangles totals ▭ AF i ▭ CE són equivalents. [Nc 2]

Per tant, els rectangles ▭ AF i ▭ CE [junts] són el doble del rectangle ▭ AF. [Nc 2]

Però els rectangles ▭ AF i ▭ CE [junts] constitueixen el gnòmon ⌝ KLM i el quadrat $\square\, CF$ [junts]. [DII 2 i Nc 2]

Per tant, el gnòmon ⌝ KLM i el quadrat $\square\, CF$ [junts] equivalen al doble del rectangle ▭ AF. [Nc 1]

Però dues vegades el rectangle de costats AB i BC equival al doble de [el rectangle] ▭ AF, ja que BF és igual a BC. [DII 1 i Nc 2]

En conseqüència, el gnòmon ⌝ KLM i el quadrat $\square\, CF$ [junts] equivalen al doble del rectangle [de costats] AB i BC. [Nc 1]

Afegim el quadrat $\square\, DG$, que és el quadrat de costat AC, a cadascun.

De tot això en resulta que el gnòmon ⌝ KLM i els quadrats $\square\, BG$[565] i $\square\, GD$ equivalen a dues vegades el rectangle format pels segments AB i BC i el quadrat de costat AC. [Nc 2]

Però el gnòmon ⌝ KLM i els quadrats $\square\, BG$ i $\square\, GD$ constitueixen [els quadrats] $\square\, ADEFB$ sencer i $\square\, CF$,
que són els quadrats de costats AB i BC.

En definitiva, els quadrats de costats AB i BC junts són equivalents a dues vegades el rectangle de costats AB i BC juntament amb el quadrat de costat AC. [Nc 1, 2 i DII 2]

I això és el que volíem demostrar. ♠

EII 8. *Tallem un segment per un punt arbitrari. Quatre vegades el rectangle de costats el segment sencer i una de les parts juntament amb el quadrat de l'altra part és igual al quadrat descrit pel segment donat i la primera part alineats.*[566]

Sigui C un punt arbitrari d'un segment AB donat.

---

565. Euclides usa $\square\, BG$ i $\square\, CF$ per a referir-se al quadrat de costat CB.

566. És possible fer-ne una demostració alternativa afegint, a una banda i a l'altra del quadrat petit $\square\, OH$, els gnòmons complets —▭ MQ més $\square\, QK$ més ▭ RH, i ▭ AK més $\square\, KD$ més ▭ KF, respectivament (figura EII 8). I també donar-ne una altra que només usi EII 4 i EII 7.

Afirmo que quatre vegades el rectangle de costats AB i BC juntament amb el quadrat de costat AC és igual al quadrat de costat AB més BC alineats.[567]

[*Demostració.*] Considerem el segment BD que s'obté prolongant el segment AB amb un segment BD igual a CB. [P 2 i EI 3][568]

Sigui $\square\, AEFD$ el quadrat descrit sobre AD. [EI 46]

Completem la figura dues vegades.[569]

Aleshores, com que els segments CB i BD, CB i GK, i BD i KN són iguals, respectivament, [EI 34]

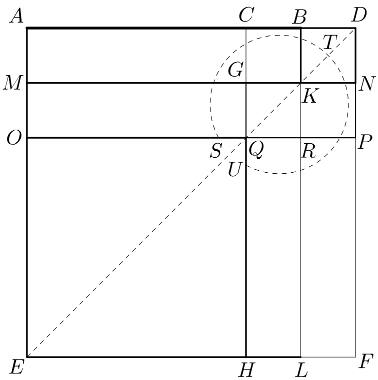


FIGURA EII 8

resulta que [els segments] GK i KN també ho són. [Nc 1, iterat]

Per la mateixa raó, [els segments] QR i RP són iguals.

I, atès que [els segments] BC i BD, i GK i KN són iguals, [els quadrats] $\square\, CK$ i $\square\, KD$, i $\square\, GR$ i $\square\, RN$ són equivalents. [EI 36]

Però, a més, [els complements] $\square\, CK$ i $\square\, RN$ són equivalents perquè són complements del paral·lelogram ▱ CP. [EI 43]

D'això en resulta que [els quadrats] $\square\, KD$ i $\square\, GR$ també en són, d'equivalents.

Per tant, els quatre [quadrats] $\square\, DK, \square\, CK, \square\, GR$ i $\square\, RN$ ho són entre si.[570] [Nc 1]

---

567. Formalment, $(AB + BC)^2 = (AC + BC + BC)^2 \underset{\text{EII 4}}{=} AC^2 + (2\,BC)^2 + 2\big(AC \times (2\,BC)\big) \underset{\text{EII 1, 4}}{=} AC^2 + 4\,BC^2 + 4\,AC \times BC \underset{\text{EII 1}}{=} AC^2 + 4\big(BC \times (AC + BC)\big) = AC^2 + 4\,(BC \times AB)$.

Observem la simplicitat que permet l'escriptura algèbrica i el fet que Euclides recorre a l'addició de segments.

568. Aquí Euclides «suma» segments amb l'objectiu d'aconseguir un segment. Vegeu la nota 279 (pàgina 89).

569. Vegeu la nota 564 (pàgina 166).

570. Els quadrats fets sobre costats iguals són equivalents; de fet, són congruents. Vegeu la nota 496 (pàgina 148).

En conseqüència, els quatre [quadrats junts] són quatre vegades [el quadrat] $\square CK$. [Nc 2]

De bell nou, atès que [els segments] CB i BD, i BD i BK [junts] —que són CG— són iguals, respectivament, [EII 4, porisma i EI 34]
i [el segment] CB [és igual] a GK —que és GQ—,
[EII 4, porisma i EI 34]
resulta que CG també és igual a GQ. [Nc 1]

I, atès que [els segments] CG i GQ, i QR i RP són iguals, respectivament,
els rectangles $\sqsubset AG$ i $\sqsubset MQ$, i $\sqsubset QL$ i $\sqsubset RF$ són equivalents, respectivament. [EI 36]

Però els rectangles $\sqsubset MQ$ i $\sqsubset QL$ són equivalents
perquè són complements del paral·lelogram $\sqsubset ML$. [EI 43]

Per tant, [els rectangles] $\sqsubset AG$ i $\sqsubset RF$ també en són, d'equivalents. [Nc 1]

En conseqüència, les quatre superfícies $\sqsubset AG$, $\sqsubset MQ$, $\sqsubset QL$ i $\sqsubset RF$ són equivalents entre si. [Nc 1]

Per tant, els quatre [rectangles junts] són quatre vegades [el rectangle] $\sqsubset AG$. [Nc 2]

Però hem vist que els quatre quadrats $\square CK$, $\square KD$, $\square GR$ i $\square RN$ equivalen al quàdruple de [el quadrat] $\square CK$.

En definitiva, les vuit superfícies —que formen el gnòmon $⌝ STU$— són quatre vegades [el quadrat] $\square AK$. [Nc 1 i DII 2]

Ara, atès que [el rectangle] $\sqsubset AK$ és el rectangle [de costats] AB i BD, i atès que [els segments] BK i BD són iguals, [DII 1]
resulta que quatre vegades [el rectangle de costats] AB i BD és el quàdruple del [rectangle] $\sqsubset AK$. [Nc 1]

Però, tal com hem vist, el gnòmon $⌝ STU$ és el quàdruple del [rectangle] $\sqsubset AK$.

Per tant, quatre vegades el rectangle [de costats] AB i BD és equivalent al gnòmon $⌝ STU$. [Nc 1]

Ara, afegim [el quadrat] $\square OH$, que equival al quadrat de costat AC, a cadascun. [EII 4, porisma i EI 34]

De tot això en resulta que quatre vegades el rectangle [de costats] AB i BD juntament amb el quadrat de costat AC equival al gnòmon ⌝STU i el [quadrat] □OH [junts]. [Nc 2]

Però el gnòmon ⌝STU i el [quadrat] □OH formen el quadrat complet □$AEFD$, que és el [quadrat] de costat AD.

En definitiva, doncs, quatre vegades el rectangle [de costats] AB i BD juntament amb el quadrat de costat AC equival al quadrat de costat AD. [Nc 1]

Però [els segments] BD i BC són iguals.

Per tant, quatre vegades el rectangle [de costats] AB i BC juntament amb el quadrat de costat AC equival al quadrat de costat AD, [Nc 1]

que és el quadrat de costat [els segments] AB i BC alineats.

I això és el que volíem demostrar. ♠

EII 9. *Tallem un segment en dues parts iguals i en dues de diferents.*[571] *Els quadrats de les parts diferents del segment total són iguals al doble del quadrat de la meitat* [*del segment donat*] *i del quadrat de costat el segment que queda determinat pels dos punts de la secció.*[572]

Sigui C el punt arbitrari que dimidia el segment AB [EI 10]
i D el que el divideix en dues parts diferents.

Afirmo que els quadrats de costats AD i DB són dues vegades els quadrats de costats AC i CD.[573]

---

571. El text diu «dues desiguals», però ens ha semblat més clar dir «dues de diferents».

572. Aquesta proposició i la següent són curioses. Trenquen la tònica de les demostracions anteriors, malgrat que no caldria, ja que és possible fer una demostració alternativa en la línia tangram usada fins ara. Euclides introdueix triangles, cosa que podria fer pensar que es prepara per a les proposicions EII 12 i EII 13, que generalitzen el teorema de Pitàgores als casos dels triangles obtusangles i acutangles, i, per tant, que fan referència a propietats dels triangles i no pas dels rectangles i dels quadrats. Però no ho fa pas per aquesta raó, ja que no necessita en absolut ni EII 9 ni EII 10 per a demostrar EII 12 i EII 13. A més, EII 9 es pot deduir com a porisma immediat d'EII 4 i EII 7 d'una forma simple.

573. Formalment, $AD^2 + DB^2 = 2\,(AC^2 + CD^2)$. Ho podem escriure

[*Demostració.*] Pel punt C, tirem el segment CE perpendicular a AB, [EI 11]
i igual a AC i CB. [EI 2]

Unim AE i BE. [P 1]

Pels punts D i F, tirem els segments DF i FG paral·lels a [els segments] CE i AB, respectivament. [EI 31]

Unim AF. [P 1]

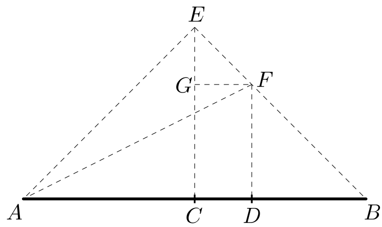


FIGURA EII 9

Aleshores, com que [els segments] AC i CE són iguals,
els angles $\widehat{CAE}$ i $\widehat{AEC}$ també ho són. [EI 5]

I, com que l'angle [amb el vèrtex al punt] C és recte,
els angles $\widehat{CAE}$ i $\widehat{AEC}$ [junts] valen un angle recte. [EI 32]

I, a més, són iguals.

Per tant, cadascun dels angles $\widehat{AEC}$ i $\widehat{CAE}$ val mig angle recte. [Nc 6′]

Per la mateixa raó, cadascun dels angles $\widehat{BEC}$ i $\widehat{CBE}$ val mig angle recte. [Nc 6′]

En conseqüència, l'angle total $\widehat{AEB}$ és recte.

I, com que l'angle $\widehat{FEG}$ és [igual a] mig angle recte,
i l'angle $\widehat{EGF}$ és recte, ja que ho és l'angle altern intern $\widehat{BCE}$, [EI 29]
l'altre angle $\widehat{EFG}$ és la meitat d'un angle recte. [Nc 1 i 3 i EI 32]

En conseqüència, l'angle $\widehat{FEG}$ és igual a l'angle $\widehat{EFG}$, [P 4 i Nc 1 i 3]
i els costats EG i GF són iguals. [EI 6]

De bell nou, com que l'angle [amb el vèrtex] a [el punt] B és la meitat d'un angle recte,
i l'angle $\widehat{BDF}$ és recte, ja que és igual a l'altern intern $\widehat{BCE}$, [EI 29]
resulta que l'altre angle $\widehat{BFD}$ és la meitat d'un angle recte. [EI 32]

En conseqüència, l'angle [amb el vèrtex] a [el punt] B és igual a l'angle $\widehat{BFD}$.

Per tant, els costats DF i DB també ho són. [EI 6]

$(AC + CD)^2 + (AC - CD)^2$ i usar EII 4 i EII 7. Novament, hi apareix la simplicitat de l'expressió algèbrica.

Ara bé, com que [els segments] AC i CE són iguals,
el quadrat de costat AC també ho és al quadrat de costat CE.[574]

En conseqüència, els quadrats de costats AC i CE [junts] són dues vegades el quadrat de costat AC.[575] [Nc 2]

Però, atès que l'angle $\widehat{ACE}$ és recte, el quadrat de costat AE és igual als quadrats de costats AC i CE [junts]. [Ei 47]

En conseqüència, el quadrat de costat AE és el doble del quadrat de costat AC.

Novament, com que EG i GF són iguals, els quadrats de costat EG i GF també ho són, respectivament.[576]

En conseqüència, els quadrats de costats EG i GF són el doble del quadrat de costat FG. [Nc 2]

Però el quadrat de costat EF és igual als quadrats de costats EG i GF [junts]. [Ei 47]

En conseqüència, el quadrat de costat EF val el doble del quadrat de costat FG. [Nc 2]

Però FG i CD són iguals. [Ei 34]

En conseqüència, el quadrat de costat EF és el doble del quadrat de costat CD. [Nc 1]

Però hem vist que el quadrat de costat AE equival al doble del quadrat de costat AC.

En conseqüència, els quadrats de costats AE i EF equivalen al doble dels quadrats de costats AC i CD. [Nc 2]

I el quadrat de costat AF és igual als quadrats de costats AE i EF, ja que l'angle $\widehat{AEF}$ és recte. [Ei 47]

En conseqüència, el quadrat de costat AF és dues vegades els quadrats de costats AC i CD [junts]. [Nc 1]

Però els quadrats de costats AD i DF són iguals al quadrat de costat AF,
atès que l'angle a D és recte. [Ei 47]

574. Vegeu la nota 496 (pàgina 148).

575. Usarem «són dues vegades el» i «valen el doble de» indistintament, malgrat que l'expressió «valer» comporta un cert significat numèric aliè a la geometria dels *Elements*.

576. Vegeu la nota 570 (pàgina 168).

En conseqüència, els quadrats de costats AD i DF [junts] valen el doble dels quadrats de costats AC i CD [junts]. [Nc 1]

Però DF i DB són iguals.

En definitiva, doncs, els quadrats de costats AD i DB valen el doble dels quadrats de costats AC i CD. [Nc 1]

I això és el que volíem demostrar. ♠

EII 10. *Tallem un segment en dues parts iguals i el prolonguem un segment. El quadrat del segment total més la prolongació i el quadrat de la part prolongada junts són el doble del quadrat de costat la meitat i del quadrat descrit pel segment que forma la meitat del segment donat més el segment afegit alineats.*[577]

Siguin C el punt que dimidia el segment AB [EI 10]
i BD una prolongació de AB alineada amb AB. [P 2]

Afirmo que els quadrats de costats AD i DB són dues vegades els quadrats de costats AC i CD.[578]

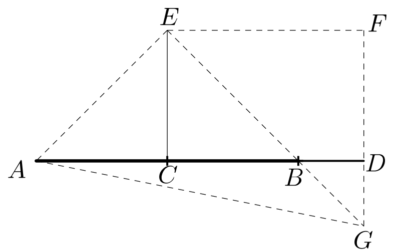


FIGURA EII 10

[*Demostració.*] Pel punt C,
tirem el segment CE perpendicular a AB, [EI 11]
i l'agafem igual a AC o a CB. [EI 2]

Unim AE i BE. [P 1]

Pels punts E i D, tirem els segments EF i DF paral·lels a AD i CE, respectivament. [EI 31]

Com que el segment EF és perpendicular als segments EC i FD, els angles $\widehat{CEF}$ i $\widehat{DFE}$ són iguals a dos angles rectes; [EI 29]
i, de retruc, els angles $\widehat{BEF}$ i $\widehat{DFE}$ fan menys de dos angles rectes. [Nc 5]

577. Això no obstant, és possible fer-ne una demostració alternativa en la línia tangram usada fins ara. És la proposició que justifica els «costats diagonal» atribuïts a Teó d'Esmirna, dels quals parlarem a *Grècia IV* i que serveixen per a aproximar $\sqrt{2}$.

578. Formalment, $AD^2 + DB^2 = 2\left(AC^2 + CD^2\right)$.

Els segments que produeixen angles que fan menys de dos angles rectes es tallen. [P 5]

Per tant, si prolonguem [els segments] BE i DF per la banda de [els punts] B i D, es tallen [en un punt].

Fem-ho. Sigui G el punt en el qual es tallen.

Unim AG. [P 1]

Aleshores, com que [els segments] AC i CE són iguals,
els angles $\widehat{EAC}$ i $\widehat{AEC}$ també ho són, [Eɪ 5]
i l'angle [amb el vèrtex] a [el punt] C és recte.

Per tant, els angles $\widehat{EAC}$, $\widehat{AEC}$ valen mig angle recte. [Eɪ 32]

Per la mateixa raó, els angles $\widehat{BEC}$, $\widehat{CBE}$ també.

En conseqüència, l'angle $\widehat{AEB}$ és recte. [Eɪ 32 i Nc 2]

I, com que l'angle $\widehat{CBE}$ val mig angle recte, l'angle $\widehat{DBG}$ també. [Eɪ 15]

Però l'angle $\widehat{BDG}$ és recte, ja que és altern a l'angle recte $\widehat{DCE}$,
i, per tant, els dos angles són iguals. [Eɪ 29]

En conseqüència, l'altre angle $\widehat{DGB}$ val mig angle recte. [Eɪ 32]

Així doncs, els angles $\widehat{DGB}$ i $\widehat{DBG}$ són iguals. [P 4 i Nc 6′]

I d'això en resulta que els costats BD i DG també ho són. [Eɪ 6]

De bell nou, atès que l'angle $\widehat{EGF}$ val mig angle recte
i l'angle [amb el vèrtex] a [el punt] F és recte perquè és igual a l'angle oposat, que és l'angle [amb el vèrtex] a [el punt] C, [Eɪ 34]
l'altre angle, $\widehat{FEG}$, val mig angle recte. [Eɪ 32 i Nc 3]

En conseqüència, els angles $\widehat{EGF}$ i $\widehat{FEG}$ són iguals
i els costats GF i EF també. [Eɪ 6]

Ara, atès que els quadrats de costats EC i CA són iguals,[579]
els quadrats de costats EC i CA valen el doble del quadrat de costat CA. [Nc 2]

Però el quadrat de costat EA és igual als quadrats de costats EC i CA. [Eɪ 47]

Per tant, el quadrat de costat AE val el doble del quadrat de costat CA. [Nc 1]

De bell nou, atès que FG i EF són iguals, els quadrats de costats FG i EF també.

579. Vegeu la nota 570 (pàgina 168).

En conseqüència, els quadrats de costats FG i EF són el doble del quadrat de costat EF.

Però el quadrat de costat EG és igual als quadrats de costats FG i EF [junts]. [EI 47]

En conseqüència, el quadrat de costat EG és el doble del quadrat de costat EF. [Nc 1]

I [els segments] EF i CD són iguals. [EI 34]

Per tant, el quadrat de costat EG és el doble del quadrat de costat CD.

Però hem vist que el quadrat de costat AE és el doble del quadrat de costat CA.

En conseqüència, els quadrats de costats AE i EG són el doble dels quadrats de costats CA i CD. [Nc 2]

I el quadrat de costat AG és igual als quadrats de costats AE i EG [junts]. [EI 47]

En conseqüència, el quadrat de costat AG és el doble dels quadrats de costats CA i CD [junts].

Però els quadrats de costats AD i DG són equivalents al quadrat de costat AG. [EI 47]

En conseqüència, els quadrats de costats AD i DG són el doble dels quadrats de costats CA i CD. [Nc 1]

I DG és igual a DB [, per construcció].

En conseqüència, els quadrats de costats AD i DB són el doble dels quadrats de costats CA i CD. [Nc 2]

I això és el que volíem demostrar. ♠

EII 11. *Volem tallar un segment [en dues parts] de manera que el rectangle determinat pel segment sencer i un dels segments sigui equivalent al quadrat de l'altre segment.*[580]

580. Si ho mirem en termes algèbrics, donat un segment a, busquem un segment $x < a$ de manera que $a\,(a - x) = x^2$ o, en altres paraules, $x^2 + a\,x = a^2$, que és un cas particular —i, de retruc, un porisma— del problema que ja hem resolt en la proposició EII 6. Aquest resultat el retrobem a EVI 30 amb el nom de «mitjana i extrema raó». De fet, el que fa Euclides és dividir un segment en «secció àuria». D'alguna manera, proporciona un «element» necessari per a la construcció del pentàgon regular, com veurem en comentar EIV 10. Aquesta proposició trenca la lí-

Sigui AB un segment donat.

Volem dividir-lo [en dues parts] de manera que el rectangle format pel segment sencer i una de les parts sigui equivalent al quadrat de costat l'altra part.

[*Construcció.*] Sigui $\square\, ABDC$ el quadrat de costat AB. [EI 46]

Dimidiem [el segment] AC pel punt E [EI 10]
i unim BE. [P 1]

Prolonguem AC fins a F de manera que [els segments] EF i BE siguin iguals. [EI 3]

Sigui $\square\, FH$ el quadrat de costat AF. [EI 46]

Prolonguem [el segment] GH fins a [un punt] K del segment CD. [P 2]

Afirmo que el punt H divideix el segment AB [en dues parts, AH i HB] de manera que el rectangle de costats AB i BH [DII 1]
és equivalent al quadrat de costat AH. ♣

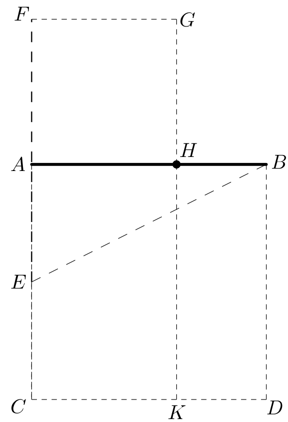


FIGURA EII 11

[*Demostració.*] En efecte, atès que el punt E dimidia el segment AC
i que hi hem afegit [el segment] FA,
el rectangle de costats CF i FA juntament amb el quadrat de costat AE equival al quadrat de costat EF. [EII 6]

Però EF i EB són iguals.

Per tant, el rectangle [de costats] CF i FA juntament amb el quadrat de costat AE equival al quadrat de costat EB. [Nc 2 i nota 496]

Però els quadrats de costats AB i AE [junts] equivalen al quadrat de costat BE, atès que l'angle [amb el vèrtex] a [el punt] A és recte. [EI 47]

Per tant, el rectangle [de costats] CF i FA juntament amb el quadrat de costat AE equival als quadrats de costats AB i AE [junts]. [Nc 1]

Restem, de cadascun, el quadrat de costat AE.

nia deductiva de l'obra, ja que no la necessitem en les proposicions següents ni tampoc requereix, com ja hem indicat abans, EII 9 i EII 10.

D'això en resulta que el rectangle [de costats] CF i FA que queda equival al quadrat de costat AB. [Nc 3]

Ara bé, el rectangle [de costats] CF i FA és $\square\, FK$, atès que AF és igual a FG,[581]

i el quadrat de costat AB és $\square\, AD$.

Per tant, [el rectangle] $\square\, FK$ equival a [el quadrat] $\square\, AD$. [Nc 1]

Restem, de cadascun, [el rectangle] $\square\, AK$.

Aleshores, [el quadrat] $\square\, FH$, que és el que queda, equival a [el rectangle] $\square\, HD$. [Nc 3]

I $\square\, HD$ és el rectangle de costats AB i BH, atès que [els segments] AB i BD són iguals.[582]

I, a més, $\square\, FH$ és el quadrat de costat AH.

En conseqüència, el rectangle de costats AB i BH equival al quadrat de costat HA. [Nc 1]

Per tant, amb [la construcció] del punt H, hem dividit el segment AB de manera que el rectangle de costats AB i BH sigui equivalent al quadrat de costat HA.

I això és el que volíem demostrar. ♠

Eii 12. *En un triangle obtusangle, el quadrat de costat el segment que subtendeix l'angle obtús és més gran que els quadrats dels altres costats. I ho és dues vegades el rectangle que té com a costats un dels segments que formen l'angle obtús, aquell sobre el qual cau la perpendicular* [*des del vèrtex oposat*], *i el segment extern al triangle delimitat pel peu de la perpendicular.*[583]

Siguin $\triangle\, ABC$ un triangle obtusangle amb l'angle obtús $\widehat{BAC}$

i BD el [segment] perpendicular des del punt B a la prolongació del

---

581. Vegeu la nota 570 (pàgina 168).

582. Vegeu la nota 570 (pàgina 168).

583. En símbols geomètrics, Euclides estableix, ras i curt, la igualtat: $BC^2 - \left(AB^2 + AC^2\right) = 2\, AC \times AD$ i, amb això, corregeix el teorema de Pitàgores perquè el quadrat sobre el costat que s'oposa a l'angle obtús és excessiu i, com veurem a Eii 13, el que s'oposa a l'angle agut, deficient. Aquestes dues proposicions accepten demostracions anàlogues a les de la proposició Ei 47 que, com a molt tard, foren establertes per Grégoire de Saint-Vincent a *Opus geometricum quadraturæ circuli et sectionum coni* (1647). Vegeu Heath (1925), volum i, p. 404–406 i 406–408.

costat CA. [P 2 i Ei 12]

Afirmo que el quadrat de costat BC és més gran, dues vegades el rectangle format pels (segments) CA i AD, que els quadrats de costats BA i CA [junts].

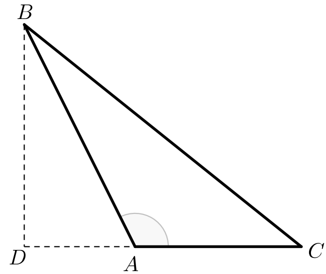


Figura Eii 12

[*Demostració.*] Atès que el punt A talla el segment CD, [P 1]
el quadrat de costat CD equival als quadrats de costats CA i AD,
i dues vegades el rectangle de costats CA i AD. [Eii 4]

Afegim el quadrat de costat BD a cadascun.

Aleshores, els quadrats de costats CD i BD equivalen als quadrats de costats CA, AD i BD i dues vegades el rectangle [de costats] CA i AD. [Nc 2]

Però el quadrat de costat BC equival als quadrats de costats CD i BD, atès que l'angle $\hat{D}$ [de vèrtex al punt D] és recte, [Ei 47]
i el de costat BA equival als quadrats de costats AD i BD. [Ei 47]

Per tant, el quadrat de costat BC equival als quadrats de costats CA i BA i dues vegades el rectangle de costats CA i AD. [Nc 2]

En definitiva, el quadrat de costat BC és més gran, dues vegades el rectangle de costats CA i AD, que els quadrats de costats CA i BA [junts]. [Nc 1]

I això és el que volíem demostrar. ♠

Eii 13. *En un triangle acutangle, el quadrat de costat el segment que subtendeix* [*un dels dos*] *angles aguts és més petit que els quadrats de costats els segments que formen l'angle obtús. I ho és dues vegades el rectangle de costats un dels segments que formen l'angle agut, aquell sobre el qual cau la perpendicular des del vèrtex oposat, i el segment que determina el peu de la perpendicular dins.*[584]

584. Cal corregir el teorema de Pitàgores perquè el quadrat sobre el costat que s'oposa a l'angle agut és deficient. En símbols geomètrics, Euclides estableix, ras i curt, la igualtat: $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\,CB \times BD$.

Les proposicions Eii 12 i Eii 13 constitueixen una mena d'aplicació d'àrees. Apliquem dos quadrats a un segment donat però mitjançant un

Siguin $\triangle ABC$ un triangle acutangle amb l'angle agut $\hat{B}$ [de vèrtex] a [el punt] B
i AD el segment perpendicular des del punt A al costat BC. [Ei 12]

Afirmo que el quadrat de costat AC és més petit, dues vegades el rectangle format per CB i BD, que els quadrats de costats [respectius] AB i BC.

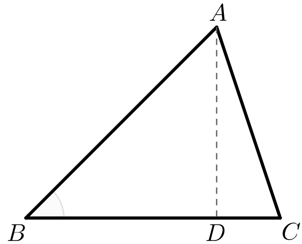


Figura Eii 13

[*Demostració*.] Atès que el punt [arbitrari] D talla el segment BC,
els quadrats de costats CB i BD equivalen a dues vegades el rectangle de costats CB i BD i el quadrat de costat CD. [Eii 7]

Afegim el quadrat de costat DA a cadascun.

Aleshores, els quadrats de costats CB, BD i DA equivalen a dues vegades el rectangle [de costats] CB i BD i als quadrats de costats DA i DC. [Nc 2]

Però el quadrat de costat AB equival als quadrats de costats BD i DA, atès que l'angle $\hat{D}$ [de vèrtex al punt D] és recte, [Ei 47]
i el quadrat de costat AC equival als quadrats de costats DA i DC. [Ei 47]

Per tant, els quadrats de costats CB i BA equivalen al quadrat de costat AC més dues vegades el rectangle de costats CB i BD. [Nc 2]

En definitiva, el quadrat de costat AC és més petit, dues vegades el rectangle de costats CB i BA, que els quadrats de costats CB i BD. [Nc 1]

I això és el que volíem demostrar. ♠

---

quadrat. Hi ha tres casos possibles segons la naturalesa de l'angle que formin dos segments iguals als costats del quadrat donat: *a*) amb exactitud si l'angle és recte; *b*) amb excés si és obtús, i *c*) amb defecte si és agut.

Hem trobat, doncs, una propietat que «caracteritza la mena de triangle que formen tres segments rectilinis», sempre, és clar, que serveixin per a fer un triangle, és a dir, sempre que dos qualssevol superin l'altre. Tenim:

$$\text{Si } \triangle ABC \text{ és un triangle, aleshores} \begin{cases} \hat{B} \text{ recte} & \leftrightarrow \quad AC^2 = AB^2 + BC^2. \\ \hat{B} \text{ obtús} & \leftrightarrow \quad AC^2 > AB^2 + BC^2. \\ \hat{B} \text{ agut} & \leftrightarrow \quad AC^2 < AB^2 + BC^2. \end{cases}$$

Eii 14. *Volem construir un quadrat equivalent a una figura poligonal donada.*[585]

Sigui A una figura rectilínia donada.

Volem construir un quadrat igual a la figura rectilínia A.

[*Construcció 1.*] Per a aconseguir-ho fem un rectangle $\square BD$ igual a la figura rectilínia A. [Ei 45] ♣

[*Demostració 1.*][586] Aleshores, si BE és igual a ED,
el que cerquem ja s'ha aconseguit [Ei 46]
i hem construït un quadrat $\square BD$ equivalent a la figura rectilínia A.

♠

[*Construcció 2.*] En el cas que no sigui així, un dels segments, BE o ED, és més gran que l'altre.

Suposem que BE és el més gran.[587]

Prolonguem-lo fins a F. [P 2]

Sigui EF igual a ED. [Ei 3]

Dimidiem BF per [el punt] G. [Ei 10]

---

585. Aquí s'acaba la «quadratura» de les figures poligonals. De fet, Euclides mostra la manera de construir un quadrat amb la mateixa superfície que un rectangle, perquè, a Ei 45, ja ha establert la construcció d'un rectangle amb la mateixa superfície que una superfície poligonal rectilínia donada. Aquest text es vincula amb els d'Aristòtil en els quals diu que el fet de «quadrar» (τετραγωνισμός) es descriu millor dient que «busquem una mitjana proporcional». Vegeu Aristòtil (1978), ii 2, 413 a 19, o Aristòtil (2000), 996 b 21. Cal recordar, tanmateix, que en l'època d'Èudox, deixeble de l'Acadèmia, ja s'havia establert plenament la teoria de la proporció. Vegeu Pla (2016*c*), p. 313–323.

Fixem-nos que tampoc es necessiten les proposicions Eii 9 i Eii 10 per a aquesta demostració.

Aquesta proposició resol geomètricament l'equació algèbrica $x^2 = A$, on $A := a\,b$ és conegut.

Si disposem de la «teoria de la proporció» i hem establert la propietat que diu que «el producte d'extrems és igual al producte de mitjans» [Evi 13], veiem que hem trobat la manera de construir la «mitjana proporcional de dos segments donats». O sigui, donats dos segments AB i CD, podem determinar un segment UV de manera que $\frac{AB}{UV} = \frac{UV}{CD}$. Vegeu el llibre vi.

586. Ho demostra per casos: cas de la igualtat i de la desigualtat dels costats. En el primer cas la proposició queda establerta trivialment.

587. En realitat, la tria del més gran no afecta la demostració.

Amb centre [al punt] G i radi igual a un dels segments GB o GF, tirem la semicircumferència $\circ BHF$.[588] [P 3 i DI 15]

Prolonguem DE fins a [el punt] H. [P 2] ♣

[*Demostració 2.*] Considerem [el segment] GH. [P 1].

Aleshores, com que el segment BF està dimidiat pel punt G i dividit en dos segments diferents pel punt E, el rectangle de costats BE i EF [DII 1] juntament amb el quadrat de costat EG és igual al quadrat de costat GF. [EII 5]

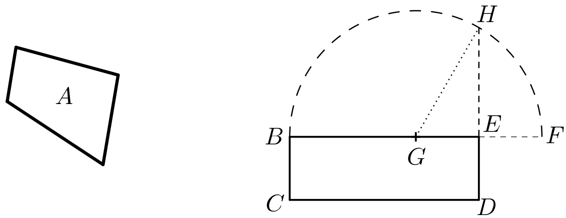


FIGURA EII 14

Però els segments GF i GH són iguals. [DI 15]

Per consegüent, el rectangle [de costats] BE i EF juntament amb el quadrat [de costat] EG equival al quadrat de costat GH.

Però els quadrats de costats HE i EG [junts] equivalen al quadrat de costat GH. [EI 47]

Per tant, el rectangle [de costats] BE i EF juntament amb el quadrat de costat EG equival als quadrats de costats HE i EG. [Nc 1]

Traiem el quadrat de costat EG de cadascun.

D'això en resulta que el rectangle de costats BE i EF que queda equival al quadrat de costat HE. [Nc 3]

Però el rectangle [de costats] BE i EF és $\square BD$, ja que EF i DE són iguals. [DII 1]

Per tant, el rectangle $\square BD$ equival al quadrat de costat HE.

I [el rectangle] $\square BD$ és igual a la figura rectilínia A [, per construcció].

588. Euclides no explica enlloc com es fa per a tirar una semicircumferència, però això no és important perquè podem tirar la circumferència sencera i considerar solament una de les parts que passa pels punts extrems del diàmetre BF. En aquest cas, ho fem a l'altra banda del segment en el qual s'ha aplicat el rectangle $\square BD$, encara que això tampoc no sigui important ni rellevant.

Per tant, la figura rectilínia A també equival al quadrat de costat HE. [Nc 1]

Finalment, d'això en resulta que hem construït un quadrat —en concret, el [quadrat] de costat HE— equivalent a la figura poligonal donada A. ♠

I això és el que volíem demostrar. ♠

A.1.3 Llibre tercer: Eiii

p. 36 **Comentaris al llibre iii.** El llibre iii està dedicat al «cercle» i a la corba que el tanca, la «circumferència» (Di 15).[589] Conté onze definicions i trenta-set proposicions, de les quals cinc són problemes i les altres teoremes. De fet, és una continuació estricta del llibre i en el sentit que, de les trenta-set proposicions, trenta-quatre en depenen. Les tres darreres, en canvi, ho fan del llibre ii. En concret: Eiii 35 depèn d'Eii 5, Eiii 36 d'Eii 6 i Eiii 37 d'Eiii 36.

El postulat P 3 (del llibre i) imposa l'existència de tots dos objectes geomètrics —el cercle i la circumferència— quan s'han donat el centre i un punt de la circumferència, o el centre i el radi (Di 16 i 17, i Ei 2). En primer lloc, cal precisar-ne els elements propis —com ara les cordes, els arcs,[590] els segments i els sectors circulars, i la tangent—, cosa que fan les definicions. Després, cal establir les propietats que relacionen aquests elements propis entre si i amb altres objectes geomètrics ja definits als dos llibres anteriors, com ara els angles (central, intern, extern i capaç),[591] els triangles i els quadrilàters. Aquest és l'objectiu de les proposicions que finalitzen establint un teorema

589. Vegeu la nota 252 (pàgina 82).

590. Euclides no introdueix cap nom, ni per als «arcs» ni per a les «cordes». Vegeu la nota 602 (pàgina 184).

591. Euclides no precisa tampoc els conceptes d'angle «central», «inscrit», «semiinscrit», «intern» i «extern», ni introdueix cap nom específic per a designar-los.

d'invariància: la invariància d'un punt, tant interior com exterior, a una circumferència.

A.1.3*a* Les definicions d'Eiii (Ὅροι) p. 37

El llibre s'obre, com és habitual, amb les definicions, concretament onze.

[Text de les definicions d'Eiii]

Diii 1. Els cercles que tenen els diàmetres[592] o els radis[593] iguals són *iguals.*[594]

Diii 2. Un segment *toca*[595] *una circumferència*[596] quan la talla per un punt però no la torna a tallar encara que el prolonguem.[597]

---

592. El terme grec διά significa «a través de», i en aquest cas, «a través del centre». De retruc, divideix el cercle en dues parts iguals (Di 17).

593. En lloc de «radi», Euclides diu: «Les rectes que ixen del centre» (αἱ ἐκ τῶν κέντρων). Vegeu la nota 234 (pàgina 79).

594. Aquesta definició afirma: «Les circumferències —i els cercles— que tenen radis iguals són iguals», cosa que és molt discutible. És realment una definició? És un postulat? És una proposició i cal demostrar-la? (vegeu Simson (1756), p. 59). La dificultat rau en el fet que la demostració s'hauria de fer per «superposició», cosa que no plau gens a Euclides. Tanmateix, aquest enunciat estableix automàticament l'«existència» de cercles iguals, atès que és possible construir segments iguals (Ei 2), dimidiarlos (Ei 10) i aplicar-hi el postulat P 2.

Podem acceptar-la com una «asserció definicional» (ὁριστικός λόγος) en el sentit aristotèlic: no només s'estableix el fet (τὸ ὅτι), sinó que també s'estableix la causa (ἀλλὰ καὶ τὴν αἰτία). Vegeu Pla (2016*c*), text C 11.4b_1, p. 583. Vegeu també, força detallat, Heath (1925), volum ii, p. 2; i, a més, Vitrac (1990), volum i, p. 390–391.

595. El contacte s'indica amb el verb ἐφάπτεσθαι, derivat del verb ἅπτεσθαι, que significa 'arribar a assolir'.

596. El text diu: «[El segment] toca un cercle.» D'ara endavant, nosaltres direm: «[El segment] és tangent a la circumferència.» Vegeu Puertas (1991), nota 83, p. 291.

597. Diu: ἁπτομένη τοῦ κύκλου καὶ ἐϑβαλλομένη οὐ τέμνει τὸν κύκλον. Aquesta definició, que obliga a recórrer al terme «es tallen», que no s'ha precisat, és curiosa. Hauria pogut establir la definició següent: «La tangent és el segment que té un sol punt en comú amb el cercle, encara que el pro-

DIII 3. Dos *cercles es toquen* quan es troben però no es tallen.[598]

DIII 4. Dues cordes d'un cercle *són equidistants del centre*[599] quan les perpendiculars tirades des del centre són iguals.[600]

DIII 5. Dues cordes d'un cercle *disten més* quan les perpendiculars tirades des del centre són més llargues.[601]

DIII 6. Un *segment de cercle* —τμῆμα κύκλου— és la part de cercle limitada per un segment i una circumferència.[602]

---

longuem, que es troba a la circumferència». I, a més, ens podem preguntar: «Com sabem que si un segment talla la circumferència d'un cercle i s'hi endinsa, perllongat convenientment, surt necessàriament del cercle?»

De fet, és una definició negativa. És curiós que Euclides no doni les tres posicions relatives que hi pot haver entre un segment i un cercle:
a) *exterior* —ni el segment ni cap de les seves prolongacions talla la circumferència—,
b) *tangent* —el segment i les seves prolongacions només tenen un punt en comú amb la circumferència—,
c) *secant* —tenen més d'un punt en comú amb la circumferència.

Recordem, però, que Euclides no precisa mai en quines circumstàncies una circumferència talla un segment (o la seva prolongació) o una altra circumferència. Vegeu la nota 269 (pàgina 88).

598. Nosaltres parlarem de «cercles tangents», que són els que «només» tenen un punt en comú. Vegeu la nota 596 (pàgina 183) i el darrer paràgraf de la 597.

599. Els geòmetres grecs no disposen del terme «distància» i usen «estar allunyat de» (ἕς ον ἀπέχειν ἀπὸ τοῦ κέντρον). El verb ἀπέχειν —«distar»— reapareix a EIII 14. Ni tenen el terme «corda». Vegeu la nota 602.

600. Fixem-nos en l'ús de la perpendicular d'un punt a un segment —o a una recta— per a materialitzar la «distància en sentit geomètric». D'aquesta manera s'evita el concepte de «distància numèrica», un concepte que no té cabuda als *Elements*. Compareu aquesta definició amb la nota 387 (pàgina 113).

601. Les proposicions EIII 14 i 15 mostren que aquestes rectes són les «cordes». Vegeu la nota 602. Euclides necessita aquesta definició —feta per distinció de casos i que exclou la semicircumferència— a EIII 25.

602. S'usa l'expressió κὑκλον περιφερείας tant per a referir-se a tota la circumferència com a una part, és a dir, a un «arc de circumferència», terme del qual Euclides no disposa. Vegeu DI 15.

Hauria estat més clar introduir els conceptes d'«arc de circumferència» —part d'una circumferència limitada per dos punts— i de «corda» —segment rectilini que té els extrems en dos punts d'una circumferència (i

DIII 7. L'*angle d'un segment* [circular] —τμήματι δὲ γωνία— és l'angle que determinen la corda i l'arc.[603]

DIII 8. L'*angle en un segment* [circular] —τμήματος δὲ γωνία— és l'angle que queda determinat pels segments que s'obtenen quan prenem un punt de l'arc en què es troba el segment[604] i tirem rectes als extrems de la recta base [, la corda,] del segment [circular].[605]

DIII 9. L'*angle subtendeix [o abraça] l'arc* quan els costats que contenen l'angle tallen una circumferència.[606]

---

no passa pel centre). Si ho hagués fet, el segment circular seria la part de cercle limitada per un arc (de circumferència) i la corda que subtendeix.

Les paraules actuals «corda» —que no és un diàmetre sinó que uneix dos punts de la circumferència sense passar pel centre— i «arc» —que no és una semicircumferència— són emprats per primera vegada a l'edició prínceps dels *Elementa* (1482) de Campanus. Vegeu, tanmateix, EIV 1.

603. Es tracta d'un angle mixtilini. Vegeu HEATH (1925), volum II, p. 4. Enlloc es diu que els dos angles del segment siguin iguals i això fa que la demostració dels *Analítics primers* d'Aristòtil (ARISTÒTIL (2007), llibre I 24 41b 1-41b 22, edició castellana, p. 175–176) d'EI 5 no sigui del tot acceptable. Vegeu PLA (2016*c*), p. 354; C 11.8a_1, p. 597; i MARCHINI (2006), p. 57–59.

A EIII 16 s'introdueix l'angle del semicercle, és a dir, l'angle format per mitja circumferència i el segment tangent en un dels extrems.

604. Un punt arbitrari de l'arc que subtendeix el segment i que està oposat a l'arc que conté el vèrtex. Vegeu EIII 32 (pàgina 226).

605. Observem que, fixat el segment circular, tenim un angle en el segment per a cada punt de l'arc. Ens podem preguntar si el segment circular determina l'angle, és a dir, si tots els angles són iguals independentment del punt de l'arc triat. Dit altrament, donat un arc, l'angle que el subtendeix —des de l'arc— és independent del vèrtex? La resposta és afirmativa, com estableix EIII 21. Tenim, doncs, un cas d'«invariància». Breument: «Tots els angles inscrits que subtendeixen un mateix arc són iguals.» Aquesta mena d'angles es coneix com «l'angle que subtendeix l'arc». Un porisma important d'aquesta proposició seria: «Qualsevol angle que subtendeix una semicircumferència és recte.»

Voldríem fer notar un fet que ens sembla curiós. Euclides no defineix l'*angle en un segment* usant l'angle central. I, tanmateix, és el més adequat perquè, d'una banda, l'angle central és el que és mesurat per l'arc, i viceversa; i, d'una altra, el vèrtex de l'angle central està ben determinat i, per tant, solament n'hi ha un per a cada arc.

606. El verb ἀπολαμβάνειν significa 'tallar' i βεβηκέναι, 'recolzar'. Vegeu la nota 597 (pàgina 183).

DIII 10. Un *sector circular* —τομεὺς δὲ κύκλου— és la part del cercle limitada pels radis[607] que determinen l'angle, amb el vèrtex al centre, i per l'arc que determinen [en la circumferència].[608]

DIII 11. *Segments semblants* —ὅμοια τμήματα κύκλων—[609] són aquells que admeten angles iguals o en què els angles són iguals entre si.[610]

p. 38

A.1.3*b* Les proposicions d'EIII

[*La geometria del cercle i de la circumferència*]

EIII 1. *Volem determinar el centre d'un cercle donat.*[611]

Sigui $\bigcirc ABC$ una circumferència donada.[612]

Volem determinar-ne el centre.

[*Construcció.*] Tirem un segment arbitrari AB.[613] [EI 1 i 2]

---

607. Euclides parla de «rectes» però necessita que tinguin un extrem al centre. Els escoliastes, anotadors de textos antics, l'anomenaven «el ganivet del sabater». Vegeu HEATH (1925), volum II, p. 5.

608. Retrobem aquest objecte a la seva obra *Sobre les Divisions*, on s'usa com a recurs per a dividir figures, com ara triangles i trapezis, en dues parts iguals. Vegeu l'apartat dedicat a *Sobre les Divisions*, de *Grècia III*, i el text corresponent.

609. Introdueix un concepte que correspon al llibre VI perquè necessita haver establert la teoria de la proporció i ho fa en referència tant a DIII 7 com a DIII 8. De fet, no és una autèntica definició sinó més aviat un teorema. Vegeu HEATH (1925), volum II, p. 5.

610. Usa l'expressió ὅμοια per a referir-se a la semblança. Val la pena observar que aquí solament necessita la igualtat de l'angle, que és únic, a diferència del que passa en el cas dels triangles, en què li cal la igualtat dels tres angles [EVI 4].

A l'apèndix, realment interessant, dedicat a l'estudi de la «igualtat», Vitrac posa de manifest la necessitat d'aquesta definició per a poder «comparar» angles d'un mateix cercle. Vegeu VITRAC (1990), p. 510–512.

611. Euclides l'enuncia en forma de problema. El podria haver enunciat en forma de teorema: «En tot cercle, el punt en què es tallen dos segments perpendiculars a dues cordes contigües —amb un extrem comú— pel punt mitjà és el centre del cercle.» Vegeu EIII 1, porisma (pàgina 188).

612. Per «cercle donat», hem d'entendre que s'ha dibuixat una circumferència [P 3] i, després, se n'ha amagat el centre i el radi.

Per exemple, podem fer el cercle que circumscriu un triangle (vegeu EIV 5) però en desconeixem el centre i el radi.

613. Cal unir dos punts A i B arbitraris de la circumferència i obtenir una corda.

Dimidiem-lo pel punt D. [Ei 10]

Per D, tirem un [segment] perpendicular CD a AB, [Ei 11]
i prolonguem-lo fins a E.[614] [P 2]

Sigui F el punt que dimidia CE. [Ei 10]

Afirmo que el punt F és el centre del cercle $\circ ABC$. ♣

[*Demostració.*] Suposem que no n'és el centre.[615]

Sigui el punt G, diferent de [el punt] F, el centre de la circumferència.[616]

Tirem [els segments] GA, GD i GB. [P 1]

Atès que els costats AD i BD són iguals,
i [el costat] DG és comú,

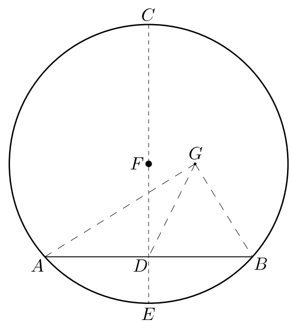


Figura Eiii 1

els dos costats AD i DG [del triangle $\triangle ADG$] són iguals als dos costats BD i DG [del triangle $\triangle BDG$, respectivament,]
i les bases GA i BG són iguals perquè totes dues són radis.[617]

Per tant, els angles $\widehat{ADG}$ i $\widehat{BDG}$ són iguals. [Ei 8]

Però quan un segment cau damunt un altre segment
i determina angles adjacents iguals, aquests angles són rectes. [Di 10]

En conseqüència, l'angle $\widehat{BDG}$ és recte.

Ara bé, l'angle $\widehat{BDF}$ també ho és. [, per construcció][618]

Per tant, l'angle $\widehat{BDF}$ és igual a l'angle $\widehat{BDG}$, [P 4]
el gran al petit. I això és impossible. [Nc 5]

Així doncs, [el punt] G no és el centre de la circumferència $\circ ABC$.

De la mateixa manera, veiem que cap altre punt ho és excepte F.[619]

Per tant, F és el centre de la circumferència $\circ ABC$.

614. Isaac Todhunter es pregunta si podem garantir que aquest segment perpendicular talla la circumferència en dos punts.

615. Hipòtesi de l'absurd.

616. Tota circumferència té centre, d'acord amb Di 15 i 16. I, ara, en aquesta demostració, s'estableix, de forma implícita, que el centre és *únic*. Vegeu l'ítem a del problema 33 (pàgina 64).

617. Aquí usem la hipòtesi de l'absurd.

618. Euclides usa, de forma implícita, la unicitat de la perpendicular al segment AB pel punt D, que ja hem discutit a la pàgina 104, o bé a Ei 14.

619. Aquí Euclides es preocupa de fer palesa la independència de la validesa del resultat del dibuix concret, cosa que queda recollida en el fet que

I això és el que volíem demostrar. ♠

Eiii 1, porisma.[620] *D'això en resulta evidentment que el centre [del cercle] és el punt que dimidia la perpendicular pel punt mitjà d'una corda qualsevol del cercle.*[621]

I això és el que volíem demostrar. ♠[622]

Eiii 2. *La corda que determinen dos punts* [*arbitraris diferents*] *d'una circumferència pertany* [*íntegrament*] *al cercle.*[623]

Siguin $\bigcirc ABC$ una circumferència, i A i B dos punts arbitraris seus.

Afirmo que la corda[624] que uneix A i B es troba dins el cercle.[625]

[*Demostració.*] *a*) Suposem que no és així sinó que cau fora del cercle,[626] com ara el segment [rectilini] AEB.[627]

Considerem el centre D del cercle $\bigcirc ABC$, [Eiii 1]
unim [els segments] AD i BD, [P 1]
i tirem el segment DFE [dins l'angle $\widehat{ADB}$]. [P 1 i Ei 9]

Aleshores, atès que [els segments] AD i BD són iguals,
els angles $\widehat{DAE}$ i $\widehat{DBE}$ també ho són. [Ei 5]

«el punt G que agafem és diferent del punt F».

La seva geometria no és ideològicament «figurativa», com s'ha afirmat a vegades. És una geometria «independent de la figura»; d'alguna manera és «ideal», però no en el sentit platònic que ja hem discutit al volum de Pla (2016*c*) i que revisitarem a *Grècia III*.

620. Vegeu <https://en.wiktionary.org/wiki/porism>.

621. Entenem que la perpendicular és una corda, és a dir, té els extrems a la circumferència. Vegeu la nota 624.

622. Euclides situa el porisma dins la demostració de la proposició Eiii 1, de la qual ho és.

623. S'estableix, doncs, una propietat fonamental del cercle: «El cercle és una figura convexa.» D'alguna manera, atesa l'aparició del «punt intern», aquest fet lliga amb la topologia moderna. Només s'aplica a Eiii 13.

624. Euclides diu «el segment AB» perquè, com ja hem dit abans, no introdueix el terme «corda».

625. Cal analitzar dos casos.

626. Hipòtesi de l'absurd. Tanmateix, és possible evitar la reducció a l'absurd. Vegeu l'ítem *b* del problema 33 (pàgina 64).

627. Atès que correspon a l'absurd, la figura que acompanya la demostració és impossible, és a dir, «ideal». Ja no tornarem a esmentar aquest fet.

Ara bé, atès que el costat AEB del triangle $\triangle\, ADE$ s'ha prolongat [fins al punt B], [P 2]
resulta que l'angle $\widehat{BED}$ és més gran que l'angle $\widehat{DAE}$. [Ei 16]

Però hem vist que els angles $\widehat{DAE}$ i $\widehat{DBE}$ són iguals,
i l'angle $\widehat{BED}$ és més gran que l'angle $\widehat{DBE}$.[628]

I, com que l'angle més gran subtendeix el costat més gran, [Ei 19]
[el segment] BD és més gran que [el segment] DE.

Però [els segments] BD i DF són iguals [atès que són radis de la circumferència $\circ ABC$]. [Di 15]

Per tant, [el segment] DF és més gran que [el segment] DE,[629]
el més curt, més gran que el més llarg. I això és impossible. [Nc 5] ♠

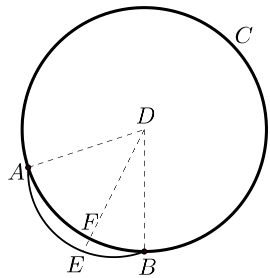


Figura Eiii 2

b) Anàlogament, podríem provar que el segment DE no pot caure damunt de la circumferència.[630]

Per tant, ha de caure dins del cercle. ♠

De tot això en resulta que la corda AB cau dins el cercle.

I això és el que volíem demostrar. ♠[631]

---

628. Apliquem la llei de la «substitució d'iguals» a una desigualtat i, malgrat que no s'ha postulat, acceptem que es manté la desigualtat. Vegeu la nota 410 (pàgina 119).

629. Vegeu la nota 628.

630. Atenció! A la demostració s'usa que DF és més gran que DE. Però, què passa si E i F coincideixen? Vegeu l'ítem *c* del problema 33 (pàgina 64).

631. Fixem-nos en el lligam que té aquesta proposició amb Ei 12, on es construeix una circumferència de la qual es coneix el centre però se'n desconeix el radi. Implícitament, s'usa que «tres punts [diferents] d'una circumferència» mai estan alineats.

Hom accepta que un segment que té els extrems en un punt de la circumferència i al centre —de fet, en un punt interior del cercle—, convenientment prolongat, talla la circumferència en un altre punt. En aquest sentit, això lliga amb la suposició que s'ha fet a Ei 22 en relació amb els segments que ixen d'un vèrtex i passen per un punt interior d'un triangle. Aquesta proposició no s'utilitza fins a Eiii 14, on es parla de la distància d'una corda al centre del cercle.

EIII 3. *En un cercle,* a) *si un segment que passa pel centre dimidia una corda, la talla perpendicularment, i* b) *si la talla perpendicularment, la dimidia.*

a) Siguin $\circ ABC$ un cercle i CD un segment que dimidia una corda AB pel punt F.

Afirmo que el segment és perpendicular a la corda.

[*Demostració.*] Prenem el centre del cercle $\circ ABC$ [EIII 1]
i tirem els segments AE i BE. [P 1]

Aleshores, com que els costats AF i FB són iguals, EF és comú,
dos costats són iguals a dos costats,
i les bases AE i EB són iguals,
resulta que els angles $\widehat{AFE}$ i $\widehat{BFE}$ són iguals. [EI 8]

Però quan un segment incideix en un altre determinant angles adjacents iguals, cada un és recte. [DI 10]

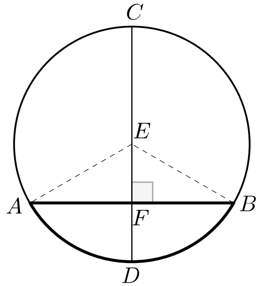


FIGURA EIII 3

Per tant, cada un dels angles $\widehat{AFE}$ i $\widehat{BFE}$ és recte.

Per consegüent, [el diàmetre] CD, que dimidia la corda AB,
és perpendicular a aquesta corda. [DI 10]

I això és el que volíem demostrar. ♠

b) Suposem que [el segment] CD és perpendicular a [el segment] AB.

Afirmo que [el segment] CD dimidia [el segment] AB, és a dir, [els segments] AF i FB són iguals.

[*Demostració.*] Amb la mateixa construcció [de la part *a*],
com que [els segments] AE i EB són iguals,
els angles $\widehat{EAF}$ i $\widehat{EBF}$ també ho són. [EI 5]

Però els angles $\widehat{AFE}$ i $\widehat{BFE}$ són rectes; [P 4 i DI 10]
per tant, [els triangles] $\triangle AFE, \triangle BFE$ tenen dos angles iguals a dos angles i un costat igual a un costat, a saber, [el costat] EF,
que és comú a tots dos i subtendeix un dels angles iguals.

Per tant, aquests triangles tenen els altres costats iguals, [, respectivament]. [EI 26]

En conseqüència, [els segments] AF i FB són iguals. ♠

I això és el que volíem demostrar. ♠

Eiii 4. *Si, en un cercle, dos segments no passen pel centre, no es dimidien.*

Siguin $\bigcirc ABCD$ un cercle, i AC i BD dues cordes que no passen pel centre però que es tallen per E.

Afirmo que aquestes dues cordes no es bisequen.

[*Demostració.*] Si es bisequen,[632]
tenim que [els segments] AE i EC són iguals,
i [els segments] BE i ED també.

Considerem el centre [F] del cercle $\bigcirc ABCD$. [Eiii 1]

Aleshores, com que el segment EF, que passa pel centre, [P 1]
dimidia el segment AC, que no hi passa,
EF és perpendicular a AC. [Eiii 3]

Per tant, l'angle $\widehat{AEF}$ és recte.

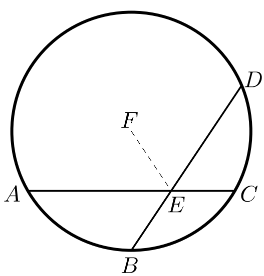


Figura Eiii 4

Novament, com que el segment EF dimidia el segment BD,
tots dos són perpendiculars. [Eiii 3]

Per tant, l'angle $\widehat{BEF}$ és recte.

Però hem vist que l'angle $\widehat{AEF}$ és recte. [Ei 10]

Per tant, els angles $\widehat{AEF}$ i $\widehat{BEF}$ són iguals. [P 4]

El petit [és igual] al gran,[633] cosa que és impossible. [Nc 5]

En definitiva, els segments AC i BD no es bisequen.

I això és el que volíem demostrar. ♠

Eiii 5. *Si dos cercles es tallen no poden tenir el mateix centre.*

Suposem que les circumferències $\bigcirc ABC$, $\bigcirc CDG$ es tallen als punts B i C.

---

632. Hipòtesi de l'absurd.

633. Euclides diu «més gran» (μεγιστη) en el sentit, però, que conté un subsegment (o part). Nosaltres usem, de vegades, la paraula «llarg» en aquest sentit però no en el de mida numèrica. Vegeu la nota 534 (pàgina 157).

Afirmo que no tenen el mateix centre.

[*Demostració.*] Suposem que és possible[634] i que E és el centre [de totes dues].

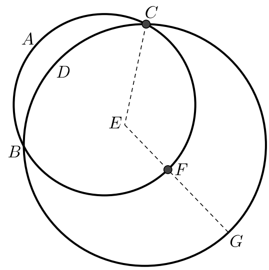


FIGURA EIII 5

Unim CE. [P 1]

Tirem un radi arbitrari EFG. [P 1]

Atès que E és el centre del cercle $\circ ABC$, [els radis] EC i EF són iguals. [DI 15]

I, com que E és el centre del cercle $\circ CDG$, [els radis] EC i EG són iguals. [DI 15]

Però [hem vist que els radis] EC i EF són iguals. [DI 15]

Per tant, [els segments] EF i EG també ho són, [Nc 1]
el més curt [igual] al més llarg, i això és impossible. [Nc 5]

En conseqüència, el punt E no és el centre dels cercles $\circ ABC$ i $\circ CDG$.

I això és el que volíem demostrar. ♠

EIII 6. *Si dues circumferències es toquen no poden tenir el mateix centre.*[635]

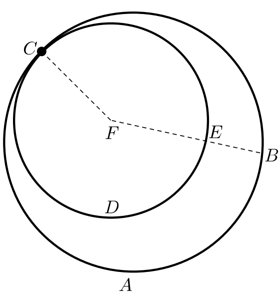


FIGURA EIII 6

Suposem que les circumferències $\circ ABC$ i $\circ CDE$ es toquen pel punt C.

Afirmo que no tenen el mateix centre.

[*Demostració.*] Suposem que és possible[636] i que F és el centre [de totes dues].

Unim FC i tirem un radi arbitrari BEF. [P 1]

Atès que el punt F és el centre del cercle $\circ ABC$,
[els radis] FC i FB són iguals. [DI 15]

634. Hipòtesi de l'absurd.

635. Aquesta proposició i l'anterior exclouen la possibilitat que dues circumferències concèntriques (de radis diferents) tinguin punts en comú. Per tant, queda establerta la «unicitat» de la circumferència (i del cercle) de centre i radi donats, com a porisma.

636. Hipòtesi de l'absurd.

I, anàlogament, atès que el punt F és el centre del cercle $\bigcirc CDE$, [els radis] FC i FE són iguals. [DI 15]

Però hem provat que [els segments] FC i FB són iguals.

Per tant, [els segments] FE i FB són iguals, [Nc 1]
el més curt al més llarg. I això és impossible. [Nc 5]

En conseqüència, el punt E no és el centre dels [dos] cercles [tangents] $\bigcirc ABC$ i $\bigcirc CDE$.

I això és el que volíem demostrar. ♠

EIII 7. *Agafem un punt del diàmetre d'un cercle que sigui diferent del centre. D'allí estant, tirem segments cap a la circumferència* [*inclòs el que el punt determina al diàmetre*]. a) *D'entre tots, el més llarg*[637] *és el* [*segment*] *gran que el punt determina sobre el diàmetre; i el més curt, el* [*segment*] *petit.* b) *De la resta de segments, el més proper*[638] *al que passa pel centre sempre és més gran que el més allunyat.* c) *I solament dos dels segments tirats des del punt a la circumferència són iguals, un a cada costat del segment més petit.*[639]

Considerem un cercle $\bigcirc ABCD$.

Siguin AD un diàmetre
i F un punt de AD diferent del centre E del cercle. [P 1 i EIII 1]

Des del punt F tirem els segments FB, FC i FG damunt la circumferència $\bigcirc ABCD$.

Afirmo que *a*) FA és el més gran i FD el més petit de tots
i que *b*) de la resta, FB és més gran que FC, i FC més que FG.

637. Vegeu les notes 534 i 633 (pàgines 157 i 191, respectivament).

638. Cal entendre-ho en sentit angular.

639. El text grec no té la paraula «un», però és la manera de donar sentit a la frase: ἐφ᾽ ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης, «cadascun cau sobre el més curt», i és així com s'estableix a la demostració.

Creiem que l'enunciat requereix una clarificació. Considerem un punt del diàmetre diferent del centre i radiem segments «a una banda» del diàmetre. Afirma que tots són diferents i decreixen constantment a mesura que «giren» al voltant del punt (a la figura EIII 7, d'esquerra a dreta). Tanmateix, afegeix que hi ha un segment, i només un, igual a cada un dels anteriors, però es troba a l'altra banda del diàmetre; de fet, és el simètric respectiu.

[*Demostració.*] *a*) Unim BE, CE i GE. [P 1]

Com que, en tot triangle, dos costats [junts] són més grans que l'altre, [Ei 20]

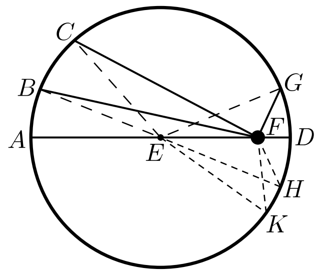


Figura Eiii 7

[els costats] EB i EF [junts] superen [el costat] BF.

Però [els segments] AE i BE són iguals. [Di 15]

Per tant, [el segment] AF és més llarg que [el segment] BF. ♠

[*Demostració.*] *b*) Tenim que, novament, [els radis] BE i CE són iguals, [Di 15]

i [el costat] EF és comú.

Per tant, els dos costats BE i EF [junts] són iguals als dos costats CE i EF [junts]. [Nc2]

Però l'angle $\widehat{BEF}$ és més gran que l'angle $\widehat{CEF}$.[640]

Per tant, la base BF és més gran que la base CF. [Ei 24]

Per la mateixa raó, [el segment] CF és més gran que [el segment] FG.

Novament, com que [els costats] GF i FE [junts] són més grans que [el costat] EG, [Ei 20]

i [els radis] EG i ED són iguals, [Di 15]

[els segments] GF i FE [junts] són més grans que [el segment] ED.[641]

De cadascun en traiem [el segment] EF,

i tenim que el romanent GF és més gran que el romanent FD. [nota 641]

Per tant, FA és el més llarg i FD el més curt. I FB és més llarg que FC i FC més llarg que FG. ♠

640. Això s'afirma però no s'estableix deductivament. Es basa en la figura? Vegeu el problema 35 (pàgina 64).

641. Aquí, novament, Euclides assumeix que es conserva la relació «més gran» o «més petit» quan suprimim un (mateix) objecte o el substituïm per un altre d'igual. Això és conseqüència de Nc 2, 3 i 4$'$. Vegeu la nota 410 (pàgina 119). És la darrera vegada que mencionarem l'ús del principi de substitució.

Afirmo que c_1) els dos segments tirats des del punt F fins a la circumferència $\bigcirc ABCD$ són iguals, un a cada banda del segment més petit FD.

[*Demostració.*] c_1) Sobre el segment EF, i amb vèrtex E, fem l'angle $\widehat{FEH}$ igual a l'angle $\widehat{GEF}$. [EI 23]

I unim FH. [P 1]

Com que [els radis] GE i EH són iguals, [DI 15]
i [el costat] EF és comú,
resulta que els dos costats GE i EF són iguals als costats HE i EF.

I, com que els angles $\widehat{GEF}$ i $\widehat{FEH}$ són iguals,
els triangles $\triangle GEF$ i $\triangle HEF$ també ho són.

Per tant, les bases FG i FH són iguals. [EI 4] ♠

Afirmo que c_2) no és possible tirar cap altre segment igual a FG des del punt F.

Suposem que n'hi ha un, FK.[642]

Aleshores, com que [el segment] FK és igual a FG,
i [els costats] FH i FG també són iguals,
resulta que [els segments] FK i FH són iguals, [Nc 1]
el [segment] més proper al centre és igual al més llunyà. I això és impossible. [EI 24]

Per tant, cap altre segment tirat des del punt F fins a la circumferència és igual a GF. ♠

En definitiva, c) solament se n'hi pot tirar un. ♠

I això és el que volíem demostrar. ♠

EIII 8. *Prenem un punt exterior a un cercle i d'allí estant tirem segments, un dels quals passa pel centre i els altres cauen a l'atzar. Dels segments que cauen a la part còncava de la circumferència:* a) *el més llarg és el que passa pel centre;* b) *de la resta, sempre és més llarg el que es troba més a prop*[643] *del que passa pel centre;* c) *dels que cauen a la part convexa de la circumferència, el més curt és el que està entre el punt i el diàmetre;* d) *dels altres, el més proper*[644] *al més petit és*

642. Hipòtesi de l'absurd.

643. Vegeu la nota 638 (pàgina 193).

644. Vegeu la nota 638 (pàgina 193).

sempre més curt que el més llunyà, i e) *del centre, només en cauen dos d'iguals a un costat i a l'altre del més petit.*

Siguin $\bigcirc ABC$ un cercle i D un punt exterior [al cercle] $\bigcirc ABC$.

Des del punt D, tirem els segments DA, DE, DF i DC, tots travessant el cercle i passant pel centre només [el segment] DA. [P 1]

Afirmo: a) Dels segments que queden determinats per la part còncava de la circumferència (κυρτὴ περιφέρειαν), $A\overset{\frown}{EF}C$, el més llarg és el que passa pel centre, és a dir, [el segment] AD. b) [El segment] DE és més llarg que [el segment] DF i [el segment] DF més llarg que [el segment] DC. Però, c) dels segments que queden determinats per la part convexa de la circumferència (κοίλην περιφέρειαν), $H\overset{\frown}{LK}G$, el més curt és el que hi ha entre el punt i el diàmetre AG, o sigui, [el segment] DG; i un segment més proper al [segment] més curt DG és sempre més curt [que un segment més allunyat], com [el segment] DK, que és més curt que DL, i [el segment] DL, que ho és més que [el segment] DH.

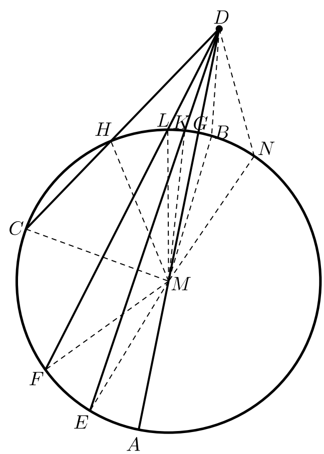


FIGURA EIII 8

[*Demostració*.] a) i b) Determinem el centre M del cercle, [EIII 1]

i unim ME, MF, MC, MK, ML i MH. [P 1]

Com que [els segments] AM i EM són iguals, [DI 15]

si afegim [el segment] MD a cadascun,

resulta que [el segment] AD és igual a [els segments] EM i MD [junts]. [Nc 2]

Però [els segments] EM i DM són més grans que [el segment] ED. [EI 20]

Així doncs, [el segment] AD també és més gran que ED.[645]

Novament, com que [els radis] EM i MF són iguals i MD [és] comú,

645. Aquí Euclides usa la transitivitat de la relació «és més gran que».

resulta que [el segment trencat] EM i MD [junts] és igual a [el segment trencat] FM i MD.

I [, per hipòtesi,] l'angle $\widehat{EMD}$ és més gran que l'angle $\widehat{FMD}$.[646]

Aleshores, la base ED és més gran que la base FD. [EI 24]

Anàlogament, podem establir que [el segment] FD és més gran que [el segment] CD.

D'això en resulta que [el segment] AD és el segment més gran
i que [el segment] DE és més llarg que [el segment] DF i [el segment] DF més llarg que [el segment] DC. ♠

[Afirmo c i d.]

[*Demostració.*] c) i d) I, com que MK i KD [junts] són més grans que MD [EI 20]
i [els radis] MG i MK [són] iguals,
el romanent KD és més llarg que el romanent GD. [nota 641]

Per tant, GD és més curt que KD.

I, com que al triangle $\triangle MLD$, els dos segments interns MK i KD s'han construït a una banda de MD,
resulta que MK i KD [junts] són més curts que ML i LD [junts]. [EI 21]

I [els radis] MK i ML [són] iguals. [DI 15]

En definitiva, el romanent DK és més curt que el romanent DL. [nota 641]

Anàlogament, podem establir que [el segment] DL és més curt que [el segment] DH.

Així doncs, [el segment] DG [és] el segment més curt de tots,
[el segment] DK [és] més curt que [el segment] DL
i [el segment] DL més curt que [el segment] DH. ♠

I també afirmo que e) solament podem tirar dos segments iguals del punt D a la circumferència, un a cada banda del segment més curt, DG.

[*Demostració.*] e_1) Damunt el segment MD i amb vèrtex a M,
construïm l'angle $\widehat{DMB}$ igual a l'angle $\widehat{KMD}$. [EI 23]

I unim DB. [P 1]

Com que [els radis] MK i MB són iguals [DI 15]

646. Vegeu la nota 640 (pàgina 194).

i [el segment] MD [és] comú,
els segments KM i MD [junts] són iguals a [els dos segments] BM i MD [junts], respectivament.

I els angles $\widehat{KMD}$ i $\widehat{BMD}$ [són] iguals.

Per tant, les bases DK i DB també ho són. [Ei 4] ♠

Afirmo que e_2) no podem fer cap altre segment que vagi del punt D a la circumferència i sigui igual a DK.

[*Demostració.*] e_2) Suposem que és possible radiar un segment, com ara DN, igual a DK.[647]

Aleshores, com que DK i DN són iguals, i també DK i DB, tenim que DB i DN també són iguals.

Per tant, un segment que es troba més a prop del [segment] més curt DG és igual a un que es troba més lluny.

Però ja hem establert que això no és possible. ♠

En conseqüència, solament podem tirar dos segments iguals radialment des del punt [exterior] D a la circumferència $\bigcirc ABC$, un a cada banda del segment DG. ♠

I això és el que volíem demostrar. ♠

Eiii 9. *Si des d'un punt de l'interior d'un cercle*[648] *radien*[649] *més de dos segments iguals, aquest punt és el centre.*

Siguin $\bigcirc ABC$ un cercle i D un punt interior.

Considerem més de dos segments iguals, com ara DA, DB i DC, que radien del punt D a la circumferència $\bigcirc ABC$.[650]

Afirmo que el punt D és el centre del cercle $\bigcirc ABC$.

[*Demostració.*] Unim AB i BC, [P 1]

647. Hipòtesi de l'absurd.

648. Diu explícitament: ἐντός, és a dir, un punt del cercle però no de la circumferència.

649. Amb l'expressió «radien» entendrem «que van del punt a la circumferència».

650. Usem $\bigcirc ABC$ per a designar el cercle i la circumferència. Hauria estat més correcte dir: «la circumferència del cercle $\bigcirc ABC$», però l'expressió abreujada que hem usat no planteja cap ambigüitat. Fins i tot podríem suprimir «a la circumferència», ja que se sobreentén en el verb «radiar», com hem establert a la nota 649.

i considerem els punts E i F que les dimidien, respectivament. [Ei 10]

Unim ED i FD, i els prolonguem fins a la circumferència. [P 1 i 2]

Obtenim els punts G, K, H i L.

Aleshores, atès que AE és igual a EB i ED [és] comú,
[els dos segments] AE i ED són iguals a [els segments] BE i ED [, respectivament].

I les bases DA i DB [són] iguals.

Per tant, els angles $\widehat{AED}$ i $\widehat{BED}$ també ho són. [Ei 8]

En conseqüència, els [dos] angles $\widehat{AED}$ i $\widehat{BED}$ són rectes. [Di 10]

D'això en resulta que GK dimidia perpendicularment AB.[651]

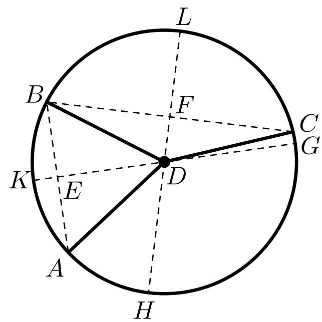


Figura Eiii 9

Ara bé, si un segment talla una corda per la meitat, passa pel centre. [Eiii 1, porisma]

De retruc, doncs, el centre del cercle es troba a [el segment] GK.

Per les mateixes raons, el centre del cercle $\circ ABC$ es troba a [el segment] HL.[652]

Però els segments GK i HL solament tenen en comú el punt D. [Nc 9′]

Per tant, D és el centre del cercle $\circ ABC$.[653]

I això és el que volíem demostrar. ♠

Eiii 10. *Una circumferència*[654] *mai pot tallar-ne una altra de* [*diferent*] *en més de dos punts.*[655]

---

651. El text diu: «Dimidia AB formant angles rectes.»

652. Atès que DC és un radi des del punt D diferent de DB i DA.

653. Heus ací una conseqüència lògica: «Tots dos segments contenen el centre [O] del cercle però solament tenen un punt en comú, el punt D; per tant, el punt D és el centre [O].»

654. Euclides usa el terme κύκλος, que, òbviament, fa referència a la circumferència del cercle.

655. Un porisma d'Eiii 10 és: «Tres punts, no alineats, determinen una circumferència i una de sola.» Recordem que és una proposició equivalent a P 5.

[*Demostració.*][656] Suposem que és possible[657] que la circumferència $\bigcirc ABC$ talli la circumferència $\bigcirc DEF$ en més de dos punts, com ara B, G, F i H.

Unim BH i BG [P 1]

i els dimidiem pels punts K i L [, respectivament]. [EI 10]

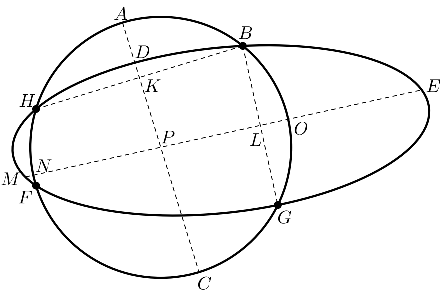


FIGURA EIII 10

Per cada un, tirem els [segments] perpendiculars KC i LM a BH i BG [, respectivament,] [EI 11]

i els prolonguem fins a A i E [, respectivament]. [P 2]

Aleshores, atès que la corda AC del cercle $\bigcirc ABC$ és perpendicular a la corda BH pel seu punt mitjà,

el centre del cercle $\bigcirc ABC$ es troba [al segment] AC. [EIII 1, porisma]

Novament, com que, al [mateix] cercle $\bigcirc ABC$, la corda NO és perpendicular a la corda BG pel punt mitjà,

el centre del cercle $\bigcirc ABC$ es troba al [segment] NO. [EIII 1, porisma]

I hem vist que també es troba damunt la corda AC.

A més, les cordes AC i NO no es poden tallar en cap altre punt diferent de P. [Nc 9′]

Per tant, el punt P és el centre del cercle $\bigcirc ABC$. [EIII 9]

De manera similar, provem que P també és el centre del cercle $\bigcirc DEF$.

D'això en resulta que els dos cercles que es tallen, $\bigcirc ABC$ i $\bigcirc DEF$, tenen el mateix centre P.

Però això és impossible. [EIII 5]

Així doncs, un cercle no en pot tallar un altre en més de dos punts.

I això és el que volíem demostrar. ♠[658]

---

656. És la primera vegada que Euclides no detalla el contingut general de l'enunciat d'acord amb la figura. Vegeu el text de la nota 264 (pàgina 86) i, a *Grècia III*, les parts d'una proposició.

657. Hipòtesi de l'absurd.

658. A partir d'aquesta proposició, Euclides no usa sempre la tècnica

EIII 11. *Si determinem els centres de dos cercles tangents internament, el segment que els uneix, prolongat, passa pel punt de tangència*[659] *dels cercles.*

Siguin ○ABC i ○ADE dos cercles que es toquen[660] internament pel punt A.

Determinem els centres F i G dels cercles ○ABC i ○ADE, respectivament. [EIII 1]

Afirmo que la prolongació del segment GF [P 2]
que uneix [els punts] G i F [P 1]
passa [pel punt] A. [EIII 6]

[*Demostració*.] Si no és així, en el cas que sigui possible,[661] el segment és com el segment FGH.

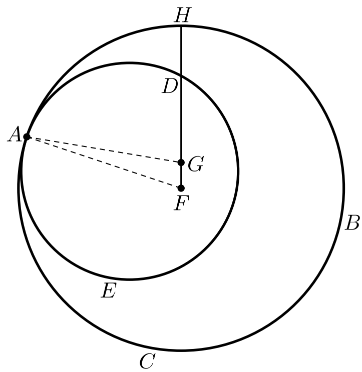


FIGURA EIII 11

Unim AF i AG. [P 1]

Com que [els segments] AG i GF [junts] són més llargs que FA, [EI 20]
que és el mateix [que dir que són més llargs] que FH [, ja que FA i FH són dos radis del cercle ○ABC], [DI 15]
podem sostreure de tots dos [el segment] FG.

Aleshores, el romanent AG és més llarg que el romanent GH. [nota 641]

Però [els radis] AG i GD són iguals. [DI 15]

Per tant, GD també és més llarg que GH, [nota 641]
el més curt que el més llarg. I això és impossible. [NC 5]

En definitiva, [la prolongació] del segment [FG] que uneix [els centres] F i G no pot caure fora [d'un dels cercles i dins de l'altre].

---

de repetir l'enunciat de la proposició, és a dir, el que es demana. Usa simplement, com ha fet des d'EI 1, l'expressió ὅπερ ἔδει δεῖξαι (QED). Vegeu la nota 277 (pàgina 89).

659. Usa el terme συναφήν.

660. Significa «són tangents».

661. Hipòtesi de l'absurd.

Per tant, resulta que conté el punt [A] de contacte [entre els dos cercles].

Així, si determinem internament els centres de dos cercles tangents, el segment que els uneix [, convenientment prolongat,] passa pel punt de contacte dels cercles.

I això és el que volíem demostrar. ♠

EIII 12. *Si dos cercles són tangents externament, el [segment] que uneix els centres passa pel punt de tangència.*[662]

Siguin $\circ ABC$ i $\circ ADE$ dos cercles tangents externament al punt A.

Determinem els centres F i G dels cercles $\circ ABC$ i $\circ ADE$. [EIII 1]

Afirmo que el segment FG que uneix [els dos centres] passa pel [punt de tangència] A.[663]

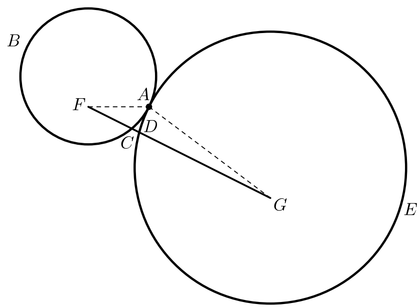


FIGURA EIII 12

[*Demostració*.] Si no és així,[664] considerem [la línia] $FCDG$ (vegeu la figura EIII 12) i unim AF i AG. [P 1]

Aleshores, atès que el punt F és el centre del cercle $\circ ABC$, [els segments] FA i FC són iguals [perquè en són radis]. [DI 15]

De bell nou, com que el punt G és el centre del cercle $\circ ADE$, [els segments] GA i GD són iguals [perquè en són radis]. [DI 15]

Ara bé, hem vist que [els segments] FA i FC [són] iguals.

Per tant, els [segments] FA i AG són iguals als (segments) FC i GD, respectivament.

D'això en resulta que el total FG és més gran que AF i AG [junts], atès que FG està format pels segments FC, CD i DG, [EI 20] i que [alhora] és més petit. I això és impossible. [Nc 5]

662. Hi ha autors, com ara Heath, que consideren que és una interpolació. Vegeu PUERTAS (1991), nota 89, p. 306.

663. Aquí Euclides usa el terme επαφῆ.

664. Hipòtesi de l'absurd.

Així doncs, el segment $[FG]$ que uneix [els centres] F i G dels cercles $\circ ABC$ i $\circ ADE$ no pot deixar de passar pel punt A.

Per tant, hi passa [necessàriament].

En definitiva, si dos cercles són tangents externament, el [segment] que uneix els centres passa [necessàriament] pel punt de tangència. I això és el que volíem demostrar. ♠

EIII 13. *Dos cercles no poden ser tangents,* a) *ni per dins,* b) *ni per fora, en més d'un punt.*

[*Demostració.*] Suposem[665] que el cercle $\circ ABDC$[666] toca el cercle $\circ EBFD$

a) —de primer, internament— en més d'un punt, és a dir, als punts D i B.

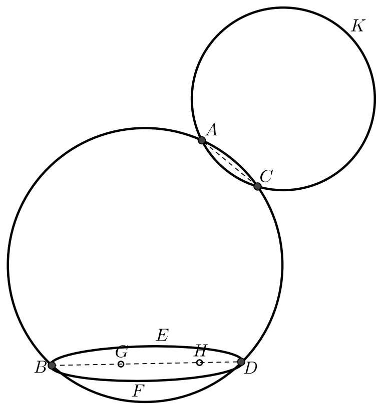


FIGURA EIII 13

Considerem els centres G i H dels cercles $\circ ABDC$ i $\circ EBFD$, respectivament. [EIII 1]

Aleshores, el [segment GH] que uneix G i H talla [la circumferència als punts] B i D, [EIII 11] i tenim un segment com ara $BGHD$. [EIII 11]

I, com que el punt G és el centre del cercle $\circ ABDC$, [els radis] BG i GD són iguals. [DI 15]

Aleshores, BG [és] més llarg que HD i, per tant, BH [és] més llarg que HD.

Anàlogament, com que el punt H és el centre del cercle $\circ EBFD$, [els radis] BH i HD són iguals. [DI 15]

Però hem establert que [el segment BH] és més gran [que el segment HD], i això [és] impossible. [Nc 5]

Per tant, dos cercles no són tangents, per dins, en més d'un punt. ♠

665. Hipòtesi de l'absurd.

666. El text grec diu $ABCD$, que és un error d'escriptura o de transcripció.

b) Tampoc són mai tangents, per fora, en més d'un punt.

Si ho són,[667]

aleshores els cercles ○ACK i ○$ABDC$ es toquen externament en més d'un punt, com ara [els punts] A i C.[668]

Unim AC. [P 1]

Aleshores, com que dos dels punts, A i C, són punts de les circumferències dels cercles ○$ABDC$ i ○ACK,

el segment que els uneix pertany als cercles. [EIII 2]

Però, alhora, cau dins de [el cercle] ○$ABDC$, i fora de [el cercle] ○ACK, [DIII 3]

cosa que és absurda.

En conseqüència, dos cercles no són mai tangents externament en més d'un punt. ♠

I hem provat que tampoc ho són internament.

En definitiva, una circumferència mai toca una altra circumferència en més d'un punt, ni internament ni externament.

I això és el que volíem demostrar. ♠

EIII 14. *En un cercle,* a) *les cordes que són iguals es troben a la mateixa distància del centre,*[669] *i* b) *les* [*cordes*] *que es troben a la mateixa distància del centre són iguals entre si.*

a) Sigui ○$ABDC$[670] un cercle.

Suposem que [les cordes] AB i CD són iguals.

Afirmo que AB i CD es troben a la mateixa distància del centre.

[*Demostració.*] *a*) Considerem el centre E del cercle ○$ABDC$. [EIII 1]

---

667. Hipòtesi de l'absurd.

668. Recordem que suposem que el cercle ○ACK és extern al cercle ○$ABDC$. Això significa que cap dels seus punts es troba a l'interior del cercle ○$ABDC$.

669. Vegeu la nota 599 (pàgina 184). Observem que Euclides solament parla de la «distància del centre d'un cercle a una corda», però no ho fa mai de la distància «entre dos punts» o «d'un punt a un segment rectilini», si bé aquesta darrera possibilitat la podem deduir de la que dóna en aquesta proposició.

670. El text grec diu $ABCD$, que és un error d'escriptura o de transcripció.

Des del punt E tirem els (segments) perpendiculars EF i EG a AB i CD [, respectivament]. [Ei 12]

Unim AE i EC. [P 1]

Aleshores, el segment EF, que passa pel centre [del cercle], talla perpendicularment qualsevol segment AB que no hi passa i ho fa pel punt mitjà. [Eiii 3]

Per tant, [els segments] AF i FB [són] iguals

i, en conseqüència, [el segment] AB és el doble del [segment] AF.

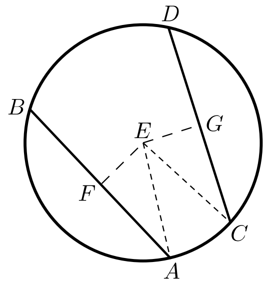


Figura Eiii 14

I, per les mateixes [raons], [el segment] CD també és el doble del [segment] CG.

Però [les cordes] AB i CD són iguals.

D'això en resulta que [els segments] AF i CG també ho són. [Nc 5′]

I, com que [els segments] AE i EC són iguals, [Di 15]

el [quadrat] de costat AE [és] equivalent al [quadrat] de costat EC. [nota 496]

Però la [suma dels quadrats] de costats AF i EF [és] equivalent al [quadrat] de costat AE, ja que l'angle a F [és] recte. [Ei 47]

Per les mateixes (raons), la [suma dels quadrats] de costats EG i GC [és] equivalent al [quadrat] de costat EC, ja que l'angle a G [és] recte. [Ei 47]

Així, la [suma dels quadrats] de costats AF i FE és equivalent a la [suma dels quadrats] de costats CG i GE. [Nc 1]

Però el [quadrat] de costat AF és equivalent al [quadrat] de costat CG, ja que, com hem vist, els costats AF i CG són iguals. [nota 496]

Aleshores, els [quadrats] que resten, de costats FE i EG, són equivalents, respectivament. [Nc 3]

D'això en resulta que [el segment] EF [és] igual a EG. [nota 496]

Però, en un cercle, dos segments es troben igualment lluny del centre quan els segments perpendiculars des del centre són iguals. [Diii 4]

En definitiva, [les cordes] AB i CD es troben igualment lluny del centre. ♠

b) Ara suposem que els segments AB i CD es troben separats igualment del centre, és a dir, suposem que [els segments] EF i EG són iguals.

Afirmo que els segments AB i CD són iguals.

[*Demostració.*] Amb una construcció anàloga a l'anterior,
veiem que [els segments] AB i CD són el doble de [els segments] AF i CG, respectivament.

I, com que [els radis] AE i CE són iguals, [Dɪ 15]
els [quadrats] de costat AE i CE són equivalents. [nota 496]

Però la [suma dels quadrats] de costats EF i FA equival al [quadrat] de costat AE [, ja que l'angle $\widehat{EFA}$ és recte]. [Eɪ 47]

I la [suma dels quadrats] de costats EG i GC equival al [quadrat] de costat CE [, ja que l'angle $\widehat{EGC}$ és recte]. [Eɪ 47]

Per tant, la [suma dels quadrats] de costats EF i FA equival a la [suma dels quadrats] de costats EG i GC. [Nc 1 i nota 496]

D'això en resulta que el [quadrat] de costat EF és igual al [quadrat] de costat EG. [Nc 3]

En conseqüència, EF [és] igual a EG. [nota 496]

Per tant, el [quadrat] romanent de costat AF equival al [quadrat] romanent de costat CG, [Nc 4]
i, en conseqüència, [els segments] AF i CG són iguals. [nota 496]

Però [els segments] AB i CD són el doble de [els segments] AF i CG, respectivament.

Per tant, AB [és] igual a CD. [Nc 5′]

I, així, en un cercle, les cordes que es troben igualment lluny del centre són iguals entre si. ♠

I això és el que volíem demostrar. ♠

Eɪɪɪ 15. *En qualsevol cercle,* a) *un diàmetre* [*és*] *la* [*corda*] *més llarga, i* b) *de la resta de cordes, la que es troba més a prop del centre és més llarga que la que es troba més lluny.*[671]

Siguin ○$ABCD$ un cercle, AD un dels [seus] diàmetres
i E el [seu] centre. [Eɪɪɪ 1]

671. Euclides introdueix una «relació d'ordre» entre les distàncies del centre d'un cercle a les cordes.

I sigui BC [una corda] més propera al diàmetre AD,[672] i FG més llunyana.

Afirmo que a) AD és la corda més llarga, i b) BC [és] més llarga que FG.

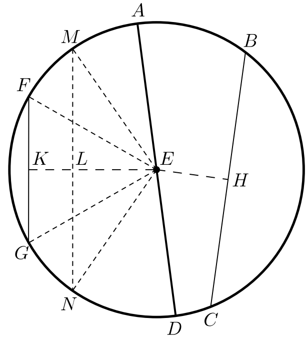


FIGURA EIII 15

[*Demostració.*] a) Pel punt E, tirem els [segments] EH i EK, perpendiculars a les cordes BC i FG [, respectivament]. [EI 12]

Com que [, per hipòtesi,] BC és més propera al centre i FG més llunyana, EK [és] més gran que EH. [DIII 5].

Ara considerem [el segment] EL igual a EH, [EI 3]
i LM [el segment] perpendicular a EK que passa per L. [EI 11]

Prolonguem-lo fins a N. [P 2]

Unim EM, EN, EF i EG. [P 1]

Com que [, per construcció,] EH i EL són iguals, [les cordes] BC i MN també ho són. [EIII 14]

Però, com que [els radis] EA i EM són iguals, i ED i EN també, [DI 15]
resulta que AD és igual a ME i EN [junts]. [Nc 2]

Però ME i EN [junts] són més llargs que MN [EI 20]
[i, per tant, AD és més llarg que MN] i MN [és] igual a BC.

En conseqüència, AD és més llarg que BC. ♠

Com que els dos [radis junts] ME i EN són iguals als [dos radis junts] FE, EG,
i l'angle $\widehat{MEN}$ [és] més gran que l'angle $\widehat{FEG}$,[673]
la base MN és més gran que la base FG. [EI 24]

Però hem vist que MN és igual a BC.

---

672. Caldria dir «més propera al centre», o definir el concepte de «distància entre dues cordes». Observem que les cordes BC, MN no són segments paral·lels a AD.

673. Això no s'ha provat. Però no deixa de ser curiós aquest raonament, atès que és una conseqüència immediata del teorema de Pitàgores i de la nota 496 (pàgina 148). Vegeu el problema 52 (pàgina 67).

[En conseqüència, BC també és més gran que FG.] [nota 410]

I, en definitiva, *a*) el diàmetre AD [és] la corda més llarga, i *b*) [la corda] BC [és] més llarga que [la corda] FG. ♠

I això és el que volíem demostrar. ♠

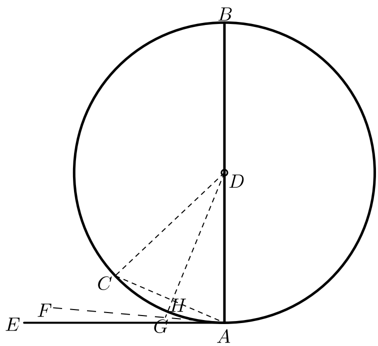
Eɪɪɪ 16. *Tirem un [segment] perpendicular a un extrem del diàmetre d'un cercle.* a) *És un segment extern al cercle.* b) *No és possible interpolar cap segment rectilini a l'espai entre [el segment] perpendicular i la circumferència. I, a més,* c) *l'angle del semicercle és més gran, i l'angle que queda és més petit que qualsevol angle agut.*[674]

Sigui $\bigcirc ABC$ un cercle de centre D.

Considerem el diàmetre AB.

Afirmo que [el segment] perpendicular a AB per A [Eɪ 11] cau fora del cercle [per més que el prolonguem].

[*Demostració.*] *a*) En cas contrari,[675] entra dins del cercle, com [la corda] CA (figura Eɪɪɪ 16).



Fɪɢᴜʀᴀ Eɪɪɪ 16

Unim DC. [P 1]

Com que [els radis] DA i DC són iguals, l'angle $\widehat{DAC}$ també ho és a l'angle $\widehat{ACD}$, [Eɪ 5] i els angles $\widehat{DAC}$ i $\widehat{ACD}$ [són] rectes.

En conseqüència, el triangle $\triangle ACD$ té dos angles rectes, $\widehat{DAC}$ i $\widehat{ACD}$. I això és impossible. [Eɪ 17]

En definitiva, la perpendicular a AB per A és exterior.

D'una manera semblant, establim que no pot caure sobre la circumferència.

Per tant, és exterior [al cercle]. ♠

674. Indirectament, aquesta proposició resol el problema que consisteix a tirar un segment tangent a una circumferència per un punt de la circumferència. Recordem que Jordanus de Nemore anomena «angle de contacte» l'angle que determinen una tangent i l'arc amb el vèrtex al punt de tangència. Vegeu Hᴇᴀᴛʜ (1925), volum ɪɪ, p. 39–43.

675. Hipòtesi de l'absurd.

b) Considerem el segment AE (de la figura EIII 16).

Afirmo que no podem inserir cap altre segment entre AE i l'arc $\overset{\frown}{CHA}$.

[*Demostració.*] Si és possible,[676]
considerem el segment AF (figura EIII 16)
i tirem el [segment] perpendicular DG de D a AF. [EI 12]

Aleshores, com que l'angle $\widehat{AGD}$ és recte i (l'angle) $\widehat{DAG}$ [és] més petit que un angle recte,
[el segment] AD [és] més gran que [el segment] DG. [EI 19]

I, atès que [el segment] AD [és] igual a [el segment] DH,
resulta que [el segment] DH [és] més gran que [el segment] DG, [nota 410]
el més petit que el més gran. I això és impossible. [Nc 5]

Per tant, no és possible intercalar cap segment entre el segment AE i la circumferència. ♠

c) També afirmo que l'angle semicircular limitat pel segment AB i l'arc[677] $\overset{\frown}{AHC}$ és més gran que qualsevol angle agut rectilini,
i l'angle restant limitat per l'arc $\overset{\frown}{AHC}$ i el segment AE és més petit que qualsevol angle rectilini agut.

[*Demostració.*] Si un angle [agut] rectilini és més gran que el [angle] format pel segment AB i l'arc $\overset{\frown}{AHC}$,
o més petit que l'angle format per l'arc $\overset{\frown}{AHC}$ al segment AE,[678]
podem inserir un segment, a l'espai que hi ha entre l'arc $\overset{\frown}{AHC}$ i el segment AE,
que determina un angle més gran que l'angle determinat per AB i l'arc $\overset{\frown}{AHC}$,
o més petit que l'angle limitat per l'arc $\overset{\frown}{AHC}$ i el segment AE. [Nc 5]

Però no és possible inserir un segment d'aquesta mena. [part *b*]

Aleshores, en cap cas, un [angle] agut rectilini no pot ser més gran que l'angle format per AB i l'arc $\overset{\frown}{AHC}$, ni tampoc [pot ser] més petit

676. Hipòtesi de l'absurd.

677. Recordem que Euclides usa l'expressió «circumferència» per a referir-se a un «arc».

678. Hipòtesi de l'absurd.

que el [angle] format per l'arc $\overset{\frown}{AHC}$ i el segment AE. ♠

I això és el que volíem demostrar. ♠

Eiii 16, porisma. Així, hem posat de manifest que *una perpendicular al diàmetre per un dels extrems toca el cercle* [i ho fa en un únic punt perquè hem establert que si ho fes en dos punts, el segment seria interior al cercle (Eiii 2)].

I això és el que volíem provar. ♠

Eiii 17. *Volem tirar una tangent a una circumferència des d'un punt* [*exterior*] *donat.*[679]

Siguin A el punt i $\circ BCD$ la circumferència.

Volem tirar una tangent a la circumferència $\circ BCD$ pel punt A.

[*Construcció.*] Determinem el centre E de la circumferència $\circ BCD$ [Eiii 1] i unim AE.[680] [P 1]

Tirem [el cercle] $\circ AFG$ de centre E i radi AE. [P 4]

Considerem el segment perpendicular a AE per D.[681] [Ei 11]

Unim EF[682] i AB. [P 1] ♣

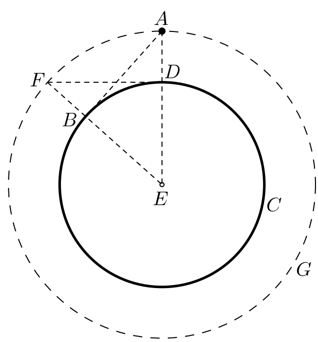


Figura Eiii 17

Afirmo que AB és la tangent a la circumferència $\circ BCD$ des del punt A.

679. Podem suposar que el punt no pertany a la circumferència perquè aquest cas l'hem establert a Eiii 16. És clar que no podem fer cap tangent des d'un punt de l'interior del cercle [Diii 2]. Es clouen, doncs, totes les possibilitats.

680. Atès que A és exterior i AE és més llarg que el radi de la circumferència donada, AE la talla en un punt D.

681. Aquí Euclides suposa que el segment perpendicular a AE per D talla el cercle $\circ AFG$ en un punt F.

682. El punt F és exterior al cercle $\circ BCD$. En conseqüència, EF és més llarg que el radi del cercle $\circ BCD$. Per tant, el segment EF talla la circumferència $\circ BCD$ per un punt B.

[*Demostració.*] Atès que E és el centre de les circumferències $\bigcirc BCD$ i $\bigcirc AFG$, els radis respectius EA i EF, i ED i EB són iguals. [DI 15]

Per tant, les parelles [de segments] AE, EB i FE, ED també ho són i contenen el mateix angle al vèrtex E.

En conseqüència, les bases DF i AB, els triangles $\triangle DEF$ i $\triangle BAE$, i els altres angles corresponents són iguals [, respectivament]. [EI 4]

D'això en resulta que el [angle] $\widehat{EDF}$ [és] igual a $\widehat{EBA}$
i $\widehat{EDF}$ [és] recte [, per construcció].

Per tant, el [angle] $\widehat{EBA}$ també [és] recte [P 4]
i EB és un radi.

I els segments perpendiculars a un extrem del diàmetre [del cercle] són tangents a la circumferència. [EIII 16, porisma]

Així doncs, AB és tangent a la circumferència $\bigcirc BCD$.

D'això en resulta que el segment AB que hem dibuixat [en la construcció] és tangent a la circumferència $\bigcirc BCD$ des del punt A.

I això és el que volíem demostrar. ♠

EIII 18. *Tenim un segment tangent a una circumferència i un* [*altre*] *que té com a extrems el punt de tangència i el centre del cercle. Aquest segment és perpendicular al* [*segment*] *tangent.*[683]

Sigui DE un segment tangent a la circumferència $\bigcirc ABC$ pel punt C.

Determinem el centre F de la circumferència [EIII 1]
i unim FC. [P 1]

Afirmo que el segment CF és perpendicular a [el segment tangent] DE.

[*Demostració.*] En cas contrari,[684]
per [el punt] F, tirem [el segment] FG perpendicular a DE. [EI 12]

Aleshores, com que l'angle $\widehat{FGC}$ és un angle recte,[685]
(l'angle) $\widehat{FCG}$ és agut. [EI 17]

683. Vegeu EIII 16 i la nota 674 (pàgina 208).

Usa l'expressió «el tangent», ἡ ἐφαπτομένε̃. És la primera vegada que usa aquest substantiu, ja que en la proposició anterior usava l'adjectiu corresponent.

684. Hipòtesi de l'absurd.

685. Atenció a la figura, que intenta representar una situació que no es pot donar.

Però l'angle més gran subtendeix el costat més gran, [Ei 19]
o sigui, FC [és] més gran que FG.

Ara bé, [els radis] FC i FB [són] iguals. [Di 15]

D'això en resulta que FB també [és] més gran que FG, [nota 410] el petit [més gran] que el més gran.

I això és impossible. [Nc 5]

Així doncs, FG no és perpendicular a DE.

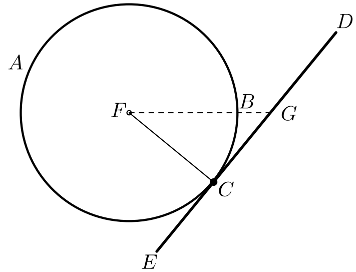


Figura Eiii 18

Anàlogament, demostrem que cap altre segment [diferent de FC] és perpendicular [a DE].

En definitiva, [el segment] FC és [el segment] perpendicular a DE.[686]

Per tant, si un segment és tangent a la circumferència,
el segment que uneix el centre i el punt de tangència és perpendicular a la tangent [pel punt de tangència].

I això és el que volíem demostrar. ♠

Eiii 19. *Si un segment és tangent a una circumferència i tirem un* [*segment*] *perpendicular al* [*segment*] *tangent pel punt de tangència, el centre* [*del cercle*] *es troba al segment tirat* [*o a la seva prolongació*].[687]

Sigui DE [un segment] tangent a la circumferència $\bigcirc ABC$ pel punt C.

Pel punt C, tirem el [segment] perpendicular CA. [Ei 11]

Afirmo que el centre del cercle es troba damunt [la corda] AC.[688]

[*Demostració*.] Suposem que no és així.[689]

Considerem el centre F [del cercle]. [Eiii 1]

Unim FC. [P 1]

686. Sabem que, per un punt exterior a una recta, hi ha un segment perpendicular [Ei 12].

687. D'alguna manera, és el recíproc d'Eiii 18.

688. Fixem-nos que Euclides tira un segment perpendicular a DE per C i el prolonga fins que talla la circumferència $\bigcirc ABC$ pel punt A. De fet, considera la corda CA perpendicular a DE pel [punt] C.

689. Hipòtesi de l'absurd.

Com que DE és tangent a la circumferència $\circ ABC$ i [el segment] FC uneix el centre i el punt de tangència,
resulta que FC és perpendicular a DE. [EIII 18]

[Aleshores, l'angle] $\widehat{FCE}$ és un angle recte.

Però $\widehat{ACE}$ també ho és.

Per tant, [els angles] $\widehat{FCE}$ i $\widehat{ACE}$ són iguals, el petit i el gran. I això és impossible. [Nc 5]

D'això en resulta que F no és el centre del cercle $\circ ABC$.

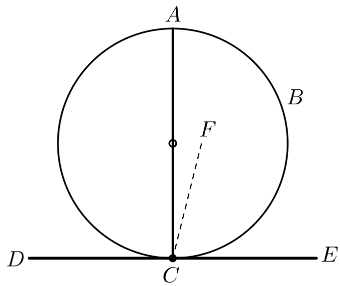


FIGURA EIII 19

Anàlogament, establim que cap punt que no es trobi a [el diàmetre] AC pot ser el centre del cercle.

En definitiva, si un segment és tangent a una circumferència
i un altre és perpendicular pel punt de tangència,
el centre del cercle es troba damunt la corda perpendicular.
I això és el que volíem demostrar. ♠

EIII 20. *En un cercle, l'angle amb el vèrtex al centre és doble que l'angle amb el vèrtex a la circumferència quan tots dos subtendeixen el mateix arc de circumferència.*[690]
Siguin $\circ ABC$ un cercle, $\widehat{BEC}$ un angle [amb el vèrtex] al centre
i $\widehat{BAC}$ [un angle amb el vèrtex] a la circumferència.
[*Demostració.*] *a*)[691] Unim AE i el prolonguem fins a F. [P 1 i 2]

Atès que [els radis] AE i EB són iguals, [DI 15]
els angles $\widehat{EAB}$ i $\widehat{EBA}$ també ho són. [EI 5]

690. El text diu: «quan els angles tenen la mateixa circumferència com a base», un pèl imprecís.

691. Euclides distingeix dos casos: *a*) aquell en què l'angle inscrit —amb el vèrtex a la circumferència— conté el centre; i *b*) aquell altre en el qual no passa això.

De fet, la demostració es basa en un lema previ: «L'enunciat val per a tots els angles inscrits i centrals que subtendeixen el mateix arc, els costats respectius dels quals són un diàmetre i una corda, i un radi d'aquest diàmetre i un altre radi, respectivament.» Considereu, per exemple, els angles $\widehat{BAF}$ i $\widehat{BEF}$.

Per tant, $\widehat{EAB}$ i $\widehat{EBA}$ [junts] fan el doble de $\widehat{EAB}$.

Ara bé, (l'angle) $\widehat{BEF}$ és igual a $\widehat{EAB}$ i $\widehat{EBA}$ [junts]. [EI 32]

Per tant, (l'angle) $\widehat{BEF}$ fa el doble que (l'angle) $\widehat{EAB}$. [Nc 1, 2 i 3]

Per les mateixes raons, (l'angle) $\widehat{FEC}$ fa el doble que (l'angle) $\widehat{EAC}$. [Nc 1, 2 i 3]

D'això en resulta que (l'angle) $\widehat{BEC}$ fa el doble que (l'angle) $\widehat{BAC}$. [Nc 2] ♠

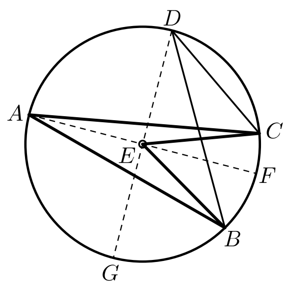


Figura EIII 20

[*Demostració.*] *b*) Ara tirem un segment trencat.[692]

Sigui $\widehat{BDC}$ un altre angle, amb el vèrtex D a la circumferència [, que subtendeix el mateix arc $\overset{\frown}{BC}$].

Unim DE i prolonguem fins a G. [P 1 i 2]

Aleshores, anàlogament [a com ho hem fet abans],

establim que l'angle $\widehat{GEC}$ fa el doble que l'angle $\widehat{GDC}$[693]

i (l'angle) $\widehat{GEB}$ fa el doble que (l'angle) $\widehat{EDB}$.[694]

D'això en resulta que (l'angle) diferència $\widehat{BEC}$ fa el doble que (l'angle) diferència $\widehat{BDC}$. [Nc 3] ♠

En un cercle, doncs, l'angle amb el vèrtex al centre de la circumferència fa el doble que l'angle amb el vèrtex a la circumferència quan [els angles] subtendeixen el mateix arc.

I això és el que volíem demostrar. ♠

EIII 21. *Tots els angles* [*inscrits*] *col·locats al mateix segment* [*circular*] *d'un cercle són iguals.*[695]

---

692. El text diu: «κεκλάσθω δὴ πάλιν», és a dir, «trenquis novament» (un segment). Usa el verb κλάῶ, 'trencar'. Curiosament, segons Aristòtil (1988), *Analítics segons*, I 10, 76 b 9, edició castellana, p. 365. Vegeu Puertas (1991), nota 93, p. 317. κλεκάσθαι és un dels termes geomètrics que cal assumir.

693. El text diu «que l'angle $\widehat{EDC}$».

694. Fixem-nos que totes dues parelles satisfan les condicions del porisma indicat a la nota 691 (pàgina 213).

695. Fixem-nos que Euclides, en lloc de fixar-se en l'arc $B\overset{\frown}{C}D$ que subtendeixen els angles, es fixa en el segment de cercle determinat per l'arc

Siguin $\bigcirc ABCD$ un cercle
i $\widehat{BAD}$ i $\widehat{BED}$ dos angles col·locats al mateix segment circular $B\overset{\frown}{AE}D$.

[*Demostració.*] Sigui F el centre del cercle $\bigcirc ABCD$. [EIII 1]

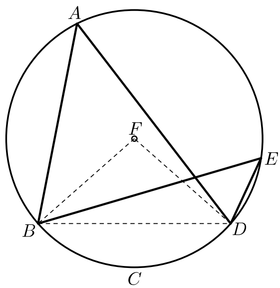


FIGURA EIII 21

Unim BF i FD. [P 1]

Com que l'angle $\widehat{BFD}$ té el vèrtex al centre [del cercle]
i (l'angle) $\widehat{BAD}$ a la circumferència, i tots dos subtendeixen el mateix arc $B\overset{\frown}{C}D$,
l'angle $\widehat{BFD}$ fa el doble que (l'angle) $\widehat{BAD}$. [EIII 20]

Per les mateixes raons, l'angle $\widehat{BFD}$ fa el doble que (l'angle) $\widehat{BED}$.

Per tant, els angles $\widehat{BAD}$ i $\widehat{BFD}$ són iguals. [Nc 6′]

I això és el que volíem demostrar. ♠

EIII 22. *Els angles oposats d'un quadrilàter inscrit en un cercle equivalen a dos angles rectes.*[696]

Siguin $\bigcirc ABCD$ un cercle
i $\square ABCD$ un quadrilàter inscrit [en el cercle].

Afirmo que els angles oposats fan dos angles rectes.

[*Demostració.*] Unim AC i BD. [P 1]

Aleshores, com que els tres angles d'un triangle fan dos angles rectes, [EI 32]

$B\overset{\frown}{AE}D$. Tots els angles inscrits col·locats en aquest segment circular subtendeixen el mateix arc $B\overset{\frown}{C}D$, que és el complement de l'arc $B\overset{\frown}{AE}D$ que determina el segment circular.

Aquesta proposició —un simple porisma de l'anterior— és un «teorema d'invariància»: «Tots els angles inscrits que subtendeixen un mateix arc són iguals i valen la meitat de l'angle central que subtendeix el mateix arc, que és únic i està ben determinat pel centre i pels dos extrems de l'arc, els quals determinen dos radis.»

Ara, la definició DIII 11 queda justificada perquè no hi ha dependència de l'angle concret triat i, per tant, la demanda d'aquesta definició —com a EIII 23— és lícita.

696. És un porisma de l'anterior.

els tres angles $\widehat{CAB}$, $\widehat{ABC}$ i $\widehat{BCA}$ del triangle $\triangle ABC$ fan dos angles rectes.

Però l'angle $\widehat{CAB}$ és igual a l'angle $\widehat{BDC}$
perquè tots dos són al mateix segment circular $\frown BADC$, [Eiii 21]

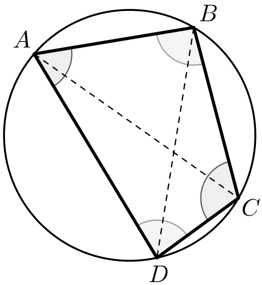


Figura Eiii 22

i l'angle $\widehat{ACB}$ és igual a l'angle $\widehat{ADB}$ perquè tots dos són al mateix segment circular $\frown ADCB$. [Eiii 21]

Per tant, l'angle $\widehat{ADC}$ és igual als angles $\widehat{BAC}$ i $\widehat{ACB}$ [junts].

Afegim l'angle $\widehat{ABC}$ a cadascun [dels anteriors].

Obtenim que els angles $\widehat{ABC}$, $\widehat{BAC}$ i $\widehat{ACB}$ [junts] són iguals als angles $\widehat{ABC}$ i $\widehat{ADC}$ [junts]. [Nc 2]

Però els angles $\widehat{ABC}$, $\widehat{BAC}$ i $\widehat{ACB}$ [junts] fan dos angles rectes.

Per tant, els angles $\widehat{ABC}$ i $\widehat{ADC}$ [junts] també. [Nc 1]

Anàlogament, podem provar que els angles $\widehat{BAD}$ i $\widehat{DCB}$ [junts] fan dos angles rectes.

I això és el que volíem demostrar. ♠

Eiii 23. *Sobre un mateix costat d'una corda no podem construir dos segments semblants i diferents alhora.*

[*Demostració.*] Suposem que és possible que[697] tinguem dos segments semblants i diferents $\frown ACB$ i $\frown ADB$
damunt el mateix costat de la corda AB.

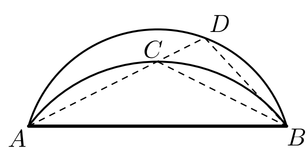


Figura Eiii 23

Tirem el segment ACD.[698] [P 1 i 2]

Unim CB i DB. [P 1]

697. Hipòtesi de l'absurd.

698. A la figura sembla, implícitament, que un arc està a l'interior de l'altre o, dit d'una altra manera, que l'un és interior i l'altre exterior. Ara bé, a la figura de la proposició següent es preveu la possibilitat que això no sigui així: una part d'un dels arcs, primerament, és interior a l'altre; després, el talla; i després, és exterior. Però això contradiu Eiii 10. Per tant, no és possible.

Ara bé, els segments [circulars] ⌓ ACB i ⌓ ADB són semblants i, com que [, per definició,] els segments semblants són els que admeten angles iguals, [Diii 11]
l'angle extern $\widehat{ACB}$ i l'angle intern $\widehat{ADB}$ [del triangle $\triangle BCD$] són iguals, cosa que és impossible. [Ei 16]
I això és el que volíem demostrar. ♠

Eiii 24. *Els segments semblants de cercles amb cordes iguals són iguals entre si.*

Considerem els dos segments circulars semblants ⌓ AEB i ⌓ CFD amb les cordes respectives AB i CD iguals.

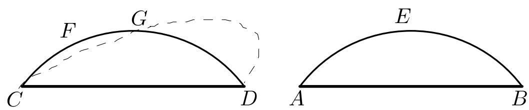


Figura Eiii 24

Afirmo que el segment ⌓ AEB és igual al segment ⌓ CFD.
[*Demostració.*] Apliquem el segment ⌓ AEB al segment ⌓ CFD,[699] el punt A damunt el punt C, i la corda AB damunt la corda CD.

Aleshores, el punt B coincidirà amb el punt D,
atès que AB és igual a CD.[700]

I, si AB i CD coincideixen, els segments ⌓ AEB i ⌓ CFD també ho fan.

En efecte, si els segments AB i CD coincideixen però els segments ⌓ AEB i ⌓ CFD no ho fan,[701]
amb tota certesa, un dels segments
a) caurà totalment a dins,
b) caurà totalment a fora,[702] o
c) es comportarà com mostra la figura.[703]

699. Com en les demostracions d'Ei 4 i Ei 8, Euclides recorre al moviment o «aplicació».

700. Si no fos així, AB, un cop mogut, seria més llarg o més curt que CD i, per Nc 4, tot allò que coincideix és igual: el llarg ho és al curt o el curt al llarg.

701. Hipòtesi de l'absurd.

702. Els casos *a* i *b* contradiuen Eiii 23, cosa que és impossible.

703. Vegeu la nota 698 (pàgina 216).

En el tercer cas, tindríem dos cercles amb tres punts en comú.[704]

I això és impossible. [Eiii 10]

En definitiva, si apliquem el segment AB sobre el segment CD, és del tot impossible que el segment $\frown AEB$ no coincideixi amb el segment $\frown CFD$. [Eiii 23]

I, per tant, tots dos segments són iguals. [Nc 4]

I això és el que volíem demostrar. ♠

Eiii 25. *Donat un segment circular, volem construir el cercle del qual és segment.*

Sigui $\frown ABC$ el segment donat d'un cercle.

Volem completar el cercle que té el segment circular $\frown ABC$ com a segment circular.

[*Construcció i demostració*.] Dimidiem el segment donat AC pel [punt] D [Ei 10] i considerem el [segment] perpendicular DB del punt D a la base AC. [Ei 11]

Unim AB. [P 1]

Aleshores, l'angle $\widehat{ABD}$ és, amb tota certesa,

a) més gran,

b) igual, o

c) més petit que (l'angle) $\widehat{BAD}$.[705]

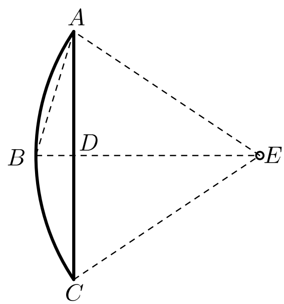


Figura Eiii 25*a*

[*Cas a*] En primer lloc, suposem que és més gran (figura Eiii 25*a*).

Considerem (l'angle) $\widehat{BAE}$ igual a l'angle $\widehat{ABD}$, construït sobre el segment BA amb vèrtex al punt A. [Ei 23]

Prolonguem DB fins a E[706] i unim EC. [P 1 i 2]

Per tant, com que l'angle $\widehat{ABE}$ és igual a $\widehat{BAE}$, els segments EB i EA són iguals. [Ei 6]

I, com que AD és igual a DC i DE [és] comú, els dos segments AD i DE són iguals als dos (segments) CD i DE,

704. Sense coincidir com a cercles.

705. Ens trobem amb una demostració per casos típica.

706. Fixem-nos que, per P 5, la prolongació de BD i el costat AE es tallen.

respectivament.

Els angles $\widehat{ADE}$ i $\widehat{CDE}$ són iguals, ja que són rectes [Di 10 i P 4]
i les bases AE i CE són iguals. [Ei 4]

Però hem vist que [els segments] AE i BE són iguals.

Per tant, [els segments] BE i CE també ho són. [Nc 1]

D'això en resulta que els tres segments AE, EB i EC són iguals entre si.

Aleshores, si tirem la circumferència de centre E [P 2]
i radi un dels segments AE, EB o EC,
passarà per tots els punts de l'arc associat al segment circular
i determinarà el cercle que el té com a segment. [Eiii 9]

També és clar que el segment $\frown ABC$ és més petit que un semicercle,
atès que el centre E cau fora. ♣ ♠

[*Cas b*] Anàlogament, si l'angle $\widehat{ABD}$ és igual a l'angle $\widehat{BAD}$,
[com que] AD és igual a BD i DC, [Ei 6]
els segments DA, DB i DC són iguals entre si. [Nc 1]

D'això en resulta que el punt D és el centre de la circumferència. [Eiii 9]

I [el segment circular] $\frown ABC$ és, de forma manifesta, un semicercle. ♣ ♠

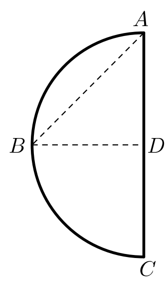


Figura Eiii 25*b*

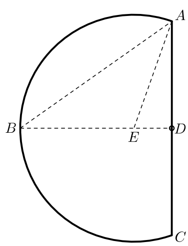


Figura Eiii 25*c*

[*Cas c*] I, a més, si (l'angle) $\widehat{ABD}$ és més petit que (l'angle) $\widehat{BAD}$,
construïm [l'angle $\widehat{BAE}$] igual a l'angle $\widehat{ABD}$,
sobre el segment BA i amb el vèrtex a A. [Ei 23]

En aquest cas, el centre es troba al segment DB, o sigui, a l'interior del segment [circular] ABC.

I el segment [circular] $\frown ABC$ és manifestament més gran que un semicercle.

I així hem construït el cercle que té com a segment [circular] el segment [circular] $\frown ABC$.[707] ♣ ♠

707. Salvant les diferències indiscutibles, observem l'analogia entre

I això és el que volíem demostrar. [Di 15] ♠

Eiii 26. *En dos cercles iguals, angles centrals o inscrits iguals subtendeixen el mateix arc.*

Siguin $\bigcirc ABC$ i $\bigcirc DEF$ dos cercles iguals.

I, en cadascun, siguin $\widehat{BGC}$ i $\widehat{EHF}$ angles centrals iguals, i $\widehat{BAC}$ i $\widehat{EDF}$ [angles] inscrits iguals.

Afirmo que l'arc $B\overset{\frown}{K}C$ és igual a l'arc $E\overset{\frown}{L}F$.

[*Demostració.*] Unim BC i EF. [P 1]

Com que els cercles $\bigcirc ABC$ i $\bigcirc DEF$ són iguals, tenen radis iguals. [Diii 1]

Així doncs, [els dos segments] BG i GC [són] iguals [als dos segments] EH i HF [, respectivament,] i l'angle de vèrtex G [és] igual al de vèrtex H.

Per tant, les bases BC i EF són iguals. [Ei 4]

I, com que l'angle de vèrtex A és igual a [el de vèrtex] D, [hipòtesi] els segments [circulars] ⌓BAC i ⌓EDF són semblants [Diii 11] i subtendeixen cordes [BC i EF] iguals.

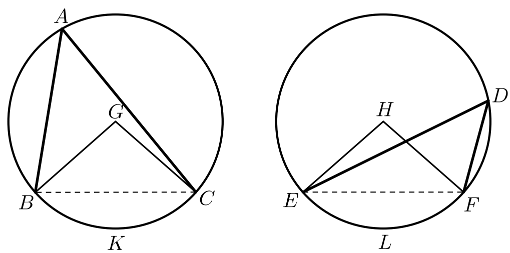


Figura Eiii 26

I segments circulars semblants que subtendeixen cordes iguals són iguals entre si. [Eiii 24]

Per tant, els segments [circulars] ⌓BAC i ⌓EDF són iguals.

Els arcs $A\overset{\frown}{B}C$ i $D\overset{\frown}{E}F$ també ho són.

I els arcs complementaris $B\overset{\frown}{K}C$ i $E\overset{\frown}{L}F$ també. [Nc 3]

D'això en resulta que, en cercles iguals, angles centrals iguals subtendeixen arcs iguals.

I això és el que volíem demostrar. ♠

aquesta triple anàlisi i la d'Hipòcrates de Quios quan parla de les lúnules. Vegeu Pla (2016*c*), p. 244 i següents.

Eiii 27. *En dos cercles iguals, dos angles centrals que subtendeixen el mateix arc són iguals.*[708]

Siguin $\widehat{BGC}$ i $\widehat{EHF}$ dos angles centrals [amb el vèrtex] als centres G i H, respectivament.

Considerem els angles inscrits $\widehat{BAC}$ i $\widehat{EDF}$ que subtendeixen els arcs iguals $\overset{\frown}{BC}$ i $\overset{\frown}{EF}$ dels cercles iguals $\bigcirc ABC$ i $\bigcirc DEF$.

[*Demostració.*] Si els angles $\widehat{BGC}$ i $\widehat{EHF}$ són diferents,[709] un és més gran que l'altre.

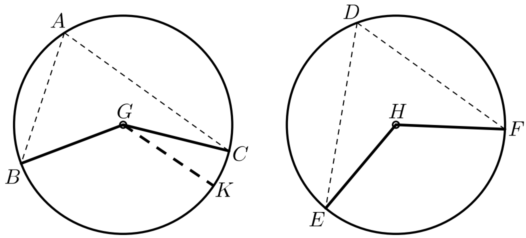


Figura Eiii 27

Suposem que (l'angle) $\widehat{BGC}$ és el més gran,

i que (l'angle) $\widehat{BGK}$ és igual a (l'angle) $\widehat{EHF}$, construït sobre el costat BG amb vèrtex a G. [Ei 23]

Però, en circumferències iguals, angles centrals que subtendeixen arcs iguals són iguals. [Eiii 26]

D'això en resulta que els arcs $\overset{\frown}{BK}$ i $\overset{\frown}{EF}$ són iguals.

Però els arcs $\overset{\frown}{EF}$ i $\overset{\frown}{BC}$ són iguals;

per tant, els arcs $\overset{\frown}{BK}$ i $\overset{\frown}{BC}$ també ho són, [Nc 1]

el petit [és] igual al gran. I això és impossible. [Nc 5]

En conseqüència, els angles $\widehat{BGC}$ i $\widehat{EHF}$ són iguals.

Però l'angle [amb el vèrtex] a A val la meitat de l'angle $\widehat{BGC}$,

i l'angle [amb el vèrtex] a D la meitat de l'angle $\widehat{EHF}$. [Eiii 20].

Així, en cercles iguals, els angles centrals que subtendeixen arcs iguals són iguals. [Nc 6′]

I això és el que volíem demostrar. ♠

Eiii 28. *En cercles iguals, dues cordes iguals determinen* [*dues parelles de*] *arcs iguals, l'arc més gran* [*igual*] *al més gran i el més petit al més petit* [*, respectivament*].

Siguin $\bigcirc ABC$ i $\bigcirc DEF$ dos cercles iguals,

708. És la proposició recíproca de l'anterior. La usarem a Evi 33.

709. Hipòtesi de l'absurd.

i AB i DE dues cordes iguals, [una de cadascun] d'aquests cercles, que determinen els arcs grans $A\overset{\frown}{C}B$ i $D\overset{\frown}{F}E$ i els arcs petits $A\overset{\frown}{G}B$ i $D\overset{\frown}{H}E$ [, respectivament].[710]

Afirmo que els arcs grans $A\overset{\frown}{C}B$ i $D\overset{\frown}{F}E$ són iguals entre si i que els arcs petits $A\overset{\frown}{G}B$ i $D\overset{\frown}{H}E$ també ho són.

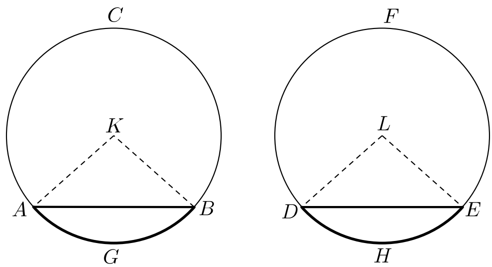


FIGURA EIII 28

[*Demostració.*] Determinem els centres dels cercles, K i L. [EIII 1]

Unim AK, KB, DL i LE. [P 1]

Els cercles iguals [$\bigcirc ABC$ i $\bigcirc DEF$] tenen radis iguals. [DIII 1]

Per tant, els segments AK i KB són iguals [als segments] DL i LE [, respectivament,] i les bases AB i DE també. [hipòtesi]

D'això en resulta que els angles $\widehat{AKB}$ i $\widehat{DLE}$ són iguals entre si. [EI 8]

I, en cercles iguals, angles centrals iguals subtendeixen arcs iguals, [EIII 26] és a dir, els arcs $A\overset{\frown}{G}B$ i $D\overset{\frown}{H}E$ són iguals.

Però les circumferències $\bigcirc ABC$ i $\bigcirc DEF$ també ho són. [hipòtesi]

Per tant, els romanents $A\overset{\frown}{C}B$ i $D\overset{\frown}{F}E$ són iguals. [Nc 3]

En definitiva, en cercles iguals, cordes iguals determinen arcs iguals, el gran ho és al gran, i el petit al petit.

I això és el que volíem demostrar. ♠

EIII 29. *En cercles iguals, cordes iguals subtendeixen arcs iguals.*[711]
Siguin $\bigcirc ABC$ i $\bigcirc DEF$ dos cercles iguals.

Considerem[712] dos arcs[713] $B\overset{\frown}{G}C$ i $E\overset{\frown}{H}F$ iguals.

---

710. Exclou el cas evident en el qual les rectes AB i DE són diàmetres. En aquest cas cal recórrer a DI 17 i a Nc 6′.

711. És la proposició recíproca de l'anterior.

712. El text diu «tallem».

713. El text diu «dues circumferències».

Tirem les cordes BC i EF.

Afirmo que les cordes BC i EF són iguals.

[*Demostració.*] Prenem els centres K i L dels cercles. [EIII 1]

Unim BK, KC, EL i LF. [P 1]

Atès que els cercles $\bigcirc ABC$ i $\bigcirc DEF$ són iguals [DIII 1]
i els arcs [respectius] $\overset{\frown}{BGC}$ i $\overset{\frown}{EHF}$ també,
resulta que els angles centrals $\widehat{BKC}$ i $\widehat{ELF}$ també ho són. [EIII 27]

Per tant, els segments BK i KC són iguals als segments EL i LF, respectivament,
i determinen angles iguals.

En conseqüència, les bases BC i EF són iguals. [EI 4]

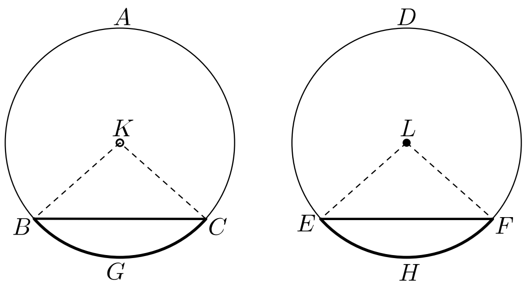


FIGURA EIII 29

Per tant, en cercles iguals, els arcs iguals subtendeixen cordes iguals.

I això és el que volíem demostrar. ♠[714]

EIII 30. *Volem dimidiar un arc de circumferència.*[715]

Considerem l'arc $\overset{\frown}{ADB}$.

Volem dimidiar-lo.

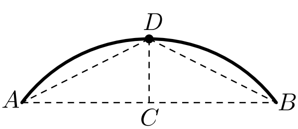


FIGURA EIII 30

[*Demostració.*] Unim AB [P 1]
i el dimidiem per C. [EI 10]

Des del punt C, tirem el [segment] perpendicular CD al segment AB. [EI 11]

Unim AD i DB. [P 1]

714. Al llibre IV les proposicions EIII 27, 28, 29 i 30 són necessàries per a establir que els polígons inscrits amb costats iguals determinen angles centrals iguals.

715. Aquesta proposició és d'una gran importància en la geometria del regle i el compàs, ja que permet construir polígons regulars amb el doble de costats que un polígon regular ja construït.

Atès que [els segments] AC i CB són iguals i [el segment] CD és un costat comú,
els segments AC i CD són iguals als segments BC i CD,
i els angles $\widehat{ACD}, \widehat{BCD}$ són iguals, ja que cadascun és recte. [P 4]

Per tant, les bases AD i DB són iguals. [EI 4]

En definitiva, AD i DB són cordes iguals que determinen arcs iguals,
el més gran ho és al més gran i el més petit al més petit. [EIII 28]

Però cada arc $\overset{\frown}{AD}$, $\overset{\frown}{DB}$ és més petit que mitja circumferència.[716]
Per tant, l'arc $\overset{\frown}{AD}$ és igual a l'arc $\overset{\frown}{DB}$.

En conseqüència, els arcs $\overset{\frown}{AD}$ i $\overset{\frown}{DB}$ són iguals.
I això és el que volíem demostrar. ♠

EIII 31. *En un cercle,* a) *l'angle a un semicercle és un angle recte,* b) *el que és en un segment més gran [que mig cercle és] més petit que un angle recte,* c) *el que és en un segment més petit [que mig cercle és] més gran que un angle recte i* d) *l'angle d'un segment més gran [que un semicercle] és més gran que un angle recte i l'angle d'un segment més petit [que un semicercle] és més petit que un angle recte.*

Siguin $\bigcirc ABCD$ un cercle,[717] BC un diàmetre
i E el centre. [EIII 1]

Considerem els segments BA, AC, AD i DC. [P 1]

Afirmo que [*a*] l'angle $\widehat{BAC}$ del semicercle $\frown BAC$ és un angle recte; [*b*] l'angle $\widehat{ABC}$ sobre el segment $\frown ABC$, [que és] més gran que un semicercle, és més petit que un angle recte, i [*c*] l'angle $\widehat{ADC}$ sobre el segment $\frown ADC$, [que és] més petit que un semicercle, és més gran que un angle recte.

[*Demostració.*] *a*) Considerem AE [P 1]
i prolonguem la corda AB fins al punt F. [P 2]

Atès que BE és igual a EA [ja que són radis],
resulta que els angles $\widehat{ABE}$ i $\widehat{BAE}$ també ho són. [EI 5]

716. Aquesta és una precisió necessària, ja que si la corda no és un diàmetre, determina dos arcs, l'un és més petit que mitja circumferència i l'altre, més gran.

717. Cal fer atenció a les definicions DIII 7 i 8.

Anàlogament, CE i EA són iguals i, de retruc, els angles $\widehat{ACE}$ i $\widehat{CAE}$ també. [Ei 5]

Per tant, l'angle complet $\widehat{BAC}$ és igual als dos [angles] $\widehat{ABC}$ i $\widehat{ACB}$ [junts], [Nc 2]
i l'angle $\widehat{FAC}$, [que és] un angle extern del triangle $\triangle ABC$,
és igual als dos angles $\widehat{ABC}$ i $\widehat{ACB}$. [Ei 32]

En conseqüència, l'angle $\widehat{BAC}$ també [és] igual a l'angle $\widehat{FAC}$. [Nc 1]

Per tant, tots dos són angles rectes. [Di 10]

D'això en resulta que l'angle $\widehat{BAC}$ en el semicercle $\frown BAC$ [Diii 8]
[amb el vèrtex A] és un angle recte.

♠

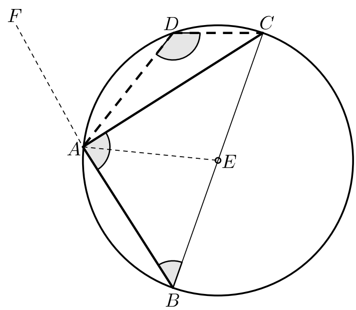


Figura Eiii 31

b) Atès que els dos angles $\widehat{ABC}$ i $\widehat{BAC}$ del triangle $\triangle ABC$ són més petits que dos angles rectes [Ei 17]
i l'angle $\widehat{BAC}$ és un angle recte,
resulta que l'angle $\widehat{ABC}$ és més petit que un angle recte,[718]
però és l'angle en el segment $\frown ABC$, [que és] més gran que un semicercle. [Nc 5] ♠

c) Atès que $\square ABCD$ és un quadrilàter inscrit en un cercle
i que la suma dels angles oposats d'un quadrilàter inscrit en un cercle val dos angles rectes, [Eiii 22]
l'angle $\widehat{ABC}$ és més petit que un angle recte
[, ja que els angles $\widehat{ABC}$ i $\widehat{ADC}$, junts, valen dos angles rectes].

Per tant, l'angle diferència $\widehat{ADC}$ és més gran que un angle recte i té el vèrtex D a l'arc d'un segment $\frown ADC$ més petit que un semicercle. [Nc 5] ♠

d) Afirmo també que l'angle $[\widehat{ADC}]$ en el segment més gran
—a saber, el que està determinat per l'arc $\overset{\frown}{ABC}$ i la corda AC—
és més gran que un angle recte,

718. Pel principi de substitució. Vegeu la nota 410 (pàgina 119).

mentre que l'angle [$\widehat{ABC}$] en el segment més petit

—a saber, el que està determinat per l'arc $A\overset{\frown}{D}[C]$ i la corda AC— és més petit que un angle recte.

[*Demostració*.] Això és evident.[719]

Atès que [l'angle format per] els segments BA i AC és un angle recte,

(l'angle) format per l'arc $A\overset{\frown}{B}C$ i el segment AC és més gran que un angle recte.

Novament, atès que [l'angle format pels] segments AC i AF és un angle recte,

(l'angle) format per l'arc $A\overset{\frown}{D}[C]$ i el segment CA és més petit que un angle recte.

Així, en un cercle, l'angle d'un semicercle és un angle recte, el que és en un segment més gran [és] més petit que un angle recte i el que és en un segment més petit [és] més gran que un angle recte.

I, a més, l'angle d'un segment més gran [que un semicercle és] més gran que un angle recte i l'angle d'un segment més petit [que un semicercle] és més petit que un angle recte. [Nc 5] ♠

I això és el que volíem demostrar. ♠

[EIII 31, porisma.[720] *Si un angle d'un triangle és igual a la suma dels altres dos, aleshores és recte.*

Efectivament, aquest angle coincideix amb l'angle adjacent extern al triangle.][721]

EIII 32. *Considerem un segment tangent a* [*la circumferència de*] *un cercle i, del punt de contacte, tirem una corda que divideix el cercle en dues parts. Aleshores, els angles que determina* [*la corda*] *amb el* [*segment*] *tangent són iguals als angles dels segments alterns del cercle.*[722]

---

719. Euclides suma i resta arcs i usa el resultat anterior.

720. Probablement fou intercalat per Teó d'Alexandria.

721. Enunciat així, el podia haver establert com a porisma d'EI 32. En aquest context, en canvi, la demostració es fa inscrivint-lo en un cercle —tres punts determinen un cercle— i aplicant-hi els resultats d'aquesta proposició.

722. Estableix que el valor dels angles semiinscrits respecte de l'angle central és el mateix que el dels angles inscrits, és a dir, valen la meitat.

Sigui EF un segment tangent a la circumferència del cercle $\bigcirc ABCD$ pel punt B.

Considerem una corda BD del cercle $\bigcirc ABCD$ que tingui un extrem al punt B.

Afirmo que els angles [rectilinis] determinats per [la corda] BD i el segment tangent EF són iguals als angles sobre els segments alternats del cercle,[723]
és a dir, l'angle $\widehat{FBD}$ és igual a l'angle construït sobre el segment $\frown BAD$, i l'angle $\widehat{EBD}$ és igual a l'angle construït sobre el segment $\frown DCB$.

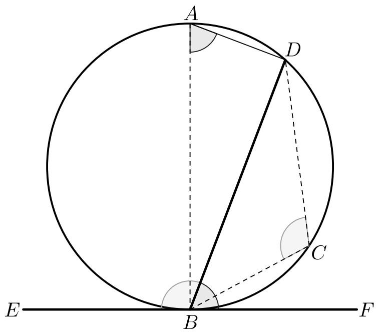


Figura Eiii 32

[*Demostració.*] Considerem el segment BA perpendicular al segment EF pel punt B. [Ei 11]

Sigui C un punt arbitrari de l'arc $\overset{\frown}{BD}$.

Considerem [els segments] AD i DC. [P 1]

Atès que el segment EF és tangent a la circumferència del cercle $\bigcirc ABCD$ pel punt B,
i [el segment perpendicular] BA s'ha tirat des del punt de contacte, resulta que el centre del cercle $\bigcirc ABCD$ és al segment BA. [Ei 19]

En conseqüència, BA és un diàmetre del cercle $\bigcirc ABCD$.

Per tant, l'angle $\widehat{ADB}$, que és en un semicercle, és recte. [Ei 31]

D'això en resulta que els altres angles, $\widehat{BAD}$ i $\widehat{ABD}$,
[del triangle $\triangle ADB$ junts] fan un angle recte. [Ei 32]

Però [, per la perpendicularitat,] l'angle $\widehat{ABF}$ també ho és.

Per tant, l'angle $\widehat{ABF}$ és igual als angles $\widehat{BAD}$ i $\widehat{ABD}$ [junts]. [Nc 1 i P 4]

Traiem l'angle $\widehat{ABD}$ de cadascun.

D'això en resulta que els angles $\widehat{DBF}$ i $\widehat{BAD}$ que resten són iguals [Nc 3]

723. Recordem que «els angles *en* el segment circular» són angles rectilinis que tenen el vèrtex «en» la circumferència i estan determinats per cordes [Diii 8 (pàgina 185)].

i l'angle $\widehat{BAD}$ és un angle en el segment del cercle alternat. [Diii 8]

Ara, atès que [el quadrilàter] $\square ABCD$ es troba inscrit en un cercle, [la suma dels] angles oposats és igual a dos angles rectes. [Ei 22]

Però els angles $\widehat{DBF}$ i $\widehat{DBE}$ [junts] valen dos angles rectes. [Ei 13]

Per tant, els angles $\widehat{DBF}$ i $\widehat{DBE}$ [junts] són iguals als angles $\widehat{BAD}$ i $\widehat{BCD}$ [junts]. [Ei 22 i Nc 2]

Ja hem vist que els angles $\widehat{BAD}$ i $\widehat{DBF}$ són iguals.

En conseqüència, l'angle que resta, $\widehat{DBE}$, és igual a l'angle $\widehat{DCB}$ que es troba al segment alternat ⌓DCB del cercle. [Nc 3]

En definitiva, si un segment és tangent a la circumferència d'un cercle i considerem una corda que divideix el cercle en dues parts i que té un dels extrems al punt de tangència,
aleshores els angles que determinen la tangent i la corda són iguals als angles dels segments alternats del cercle.

I això és el que volíem demostrar. ♠

Eiii 33. *Donats un segment i un angle rectilinis, amb aquest angle volem fer un segment de cercle sobre el segment.*

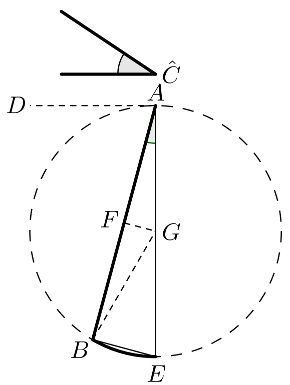


Figura Eiii 33*a*

Siguin AB el segment i $\hat{C}$ l'angle, tots dos rectilinis.

Volem construir un segment de cercle que accepti l'angle $\hat{C}$ i el segment donats, tots dos rectilinis.

L'angle $\hat{C}$ és necessàriament

a) agut,
b) recte o
c) obtús.[724]

a) En primer lloc, analitzem el cas en què l'angle $\hat{C}$ és agut.

[*Construcció.*] Considerem l'angle $\widehat{BAD}$ igual a l'angle $\hat{C}$ de costat AB i vèrtex A (figura Eiii 33*a*). [Ei 23]

Aleshores, l'angle $\widehat{BAD}$ també és agut.

Ara tirem el segment AE perpendicular a AD [pel punt A]. [Ei 11]

724. Euclides usa la distinció de casos.

El punt F dimidia el segment AB i el punt G, el segment AE; [EI 10] tirem el segment perpendicular FG del punt F al segment AB [EI 11] i, finalment, considerem GB.[725] [P 1]

Atès que AF és igual a FB i FG [és] comú,
els dos (segments) AF i FG són iguals als dos (segments) BF i FG [, respectivament,]
i l'angle $\widehat{AFG}$ [és] igual a (l'angle) $\widehat{BFG}$.

I les bases AG i BG són iguals. [EI 4]

Aleshores, [per definició,] el cercle de centre G i radi GA passa pel punt B [i, òbviament, per A].

[La circumferència de centre G i radi GA talla la seva prolongació AE pel punt E.]

Així queda determinat el segment $\frown ABE$. ♣

[*Demostració.*] Unim EB. [P 1]

Atès que [el segment] AD és perpendicular al diàmetre AE pel punt A,
el [segment] AD és tangent al cercle $\circ ABE$. [EIII 16, porisma]

En conseqüència, el segment AD és tangent al cercle $\circ ABE$
i el segment AB és una corda [amb un extrem al punt A].

Per tant, l'angle $\widehat{DAB}$ és igual a l'angle $\widehat{AEB}$ sobre el segment circular alternat del cercle. [EIII 32][726]

Ara bé, l'angle $\widehat{DAB}$ és igual a l'angle $\hat{C}$.

Per tant, els angles $\hat{C}$ i $\widehat{AEB}$ també ho són. [Nc 1]

En definitiva, hem fet el segment $\frown AEB$ d'angle $\widehat{AEB}$, igual a l'angle donat $\hat{C}$, sobre el segment AB.

I això és el que volíem demostrar. ♠

b) En segon lloc, analitzem el cas en què l'angle $\hat{C}$ és recte.

[*Construcció.*] Volem fer un segment de cercle $\frown AEB$ que accepti l'angle [donat] $\hat{C}$, que és recte, damunt la corda AB.

Com abans, fem l'angle $\widehat{BAD}$ igual a $\hat{C}$ (figura EIII 33*b*). [EI 23]

---

725. Suposa que el punt G és un punt del segment AE, és a dir, que els segments AE i FG es tallen.

726. Fixem-nos que Euclides usa el fet que angles de costats perpendiculars i de la mateixa classe són iguals. Ho estableix implícitament a EIII 32, com acabem de veure. De fet, n'és un porisma.

Dimidiem el segment AB pel punt F. [Ei 10]

Amb centre F i un dels segments FA o FB com a radi, tirem la circumferència $\bigcirc AEB$. [P 3]

El segment AD és tangent al cercle $\bigcirc ABE$, atès que l'angle [amb el vèrtex] a A és recte [Eiii 16, porisma]
[, i el semicercle determinat pel diàmetre és el segment que busquem]. ♣

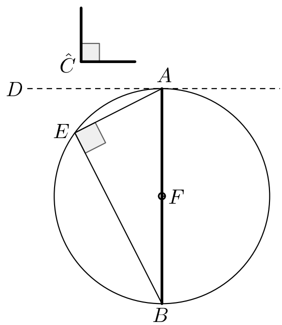


Figura Eiii 33b

[*Demostració*.] L'angle $\widehat{BAD}$ és igual a l'angle del segment $\frown AEB$.

I això és així perquè és un semicercle. [Eiii 31]

Però l'angle $\widehat{BAD}$ és igual a l'angle $\hat{C}$.

En definitiva, l'angle en el segment $\frown AEB$ és igual a l'angle $\hat{C}$.

I això és el que volíem demostrar. ♠

c) En tercer lloc, analitzem el cas en què l'angle $\hat{C}$ és obtús.

[*Construcció*.] Fem l'angle $\widehat{BAD}$ igual a l'angle $\hat{C}$, amb un costat a AB i vèrtex a A (figura Eiii 33c). [Ei 23]

Pel punt A, tirem el segment AE perpendicular al segment AD. [Ei 11]

Ara dimidiem el segment AB pel punt F [Ei 10]
i tirem [el segment] perpendicular FG a AB. [Ei 11]

Unim GB. [P 1]

Com que AF és igual a FB i FG és comú, els segments AF i FG són iguals als segments BF i FG [, respectivament].

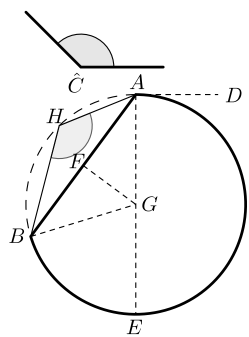


Figura Eiii 33c

Però, a més, els angles $\widehat{AFG}$ i $\widehat{BFG}$ són iguals. [P 4]

Per tant, resulta que la base AG és igual a la base BG. [Ei 4]

Per definició, la circumferència de centre G i radi GA passa per B [D i 15] i determina el segment AEB. ♣

[*Demostració.*] Atès que AD és perpendicular al diàmetre AE pel punt A,

AD és tangent a la circumferència $\bigcirc ABE$ per A. [EIII 16, porisma]

Però AB és una corda [, diferent del diàmetre,] que passa per A.

D'això en resulta que l'angle $\widehat{BAD}$ és igual a l'angle construït en el segment altern $\frown AHB$. [EIII 32]

Però l'angle $\widehat{BAD}$ és igual a l'angle $\hat{C}$

i, per tant, l'angle $\widehat{AHB}$ ho és a l'angle $\hat{C}$. ♠

I això és el que volíem demostrar. ♠

EIII 34. *Volem determinar un segment d'un cercle que tingui un angle rectilini donat.*

Siguin $\bigcirc ABC$ el cercle i $\hat{D}$ l'angle rectilini.

Volem determinar un segment del cercle donat $\bigcirc ABC$ que accepti l'angle donat $\hat{D}$.

Considerem el segment [rectilini] EF tangent a [la circumferència] $\bigcirc ABC$ pel punt B. [EIII 17]

Construïm l'angle $\widehat{FBC}$ igual a l'angle donat $\hat{D}$, sobre el segment BF i amb vèrtex al punt B. [EI 23]

Aleshores, atès que [el segment] EF és tangent al cercle $\bigcirc ABC$

i [el segment] BC és una corda que té un extrem a B,

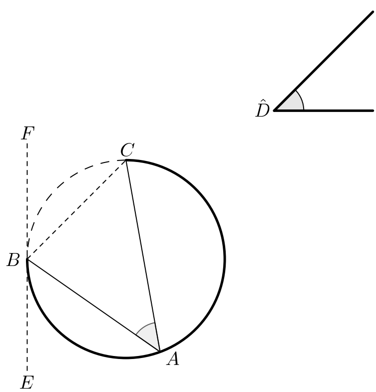


FIGURA EIII 34

resulta que l'angle $\widehat{FBC}$ és igual a l'angle que determina el segment alternat $\frown BAC$. [EIII 32]

Però l'angle $\widehat{FBC}$ és igual a [l'angle donat] $\hat{D}$.

Per tant, [l'angle inscrit] en l'arc $B\overset{\frown}{A}C$ també és igual a [l'angle donat] $\hat{D}$. [Nc 1]

I això és el que volíem demostrar. ♠[727]

727. En realitat, solament ho hem establert quan l'angle $\hat{D}$ és agut. Els casos d'angle recte i obtús es dedueixen d'EIII 31 i 22, respectivament. Ve-

EIII 35. *Si dues cordes d'un cercle es tallen [dins el cercle], el rectangle de costats les dues parts de la primera és igual al rectangle format per les dues parts de la segona.*[728]

Siguin AC i BD dues cordes del cercle $\circ ABCD$
que es tallen pel punt E.

Afirmo que el rectangle de costats AE i EC és equivalent[729] al rectangle de costats DE i EB.[730]

[*Demostració*.] *a*) Si AC i BD passen pel centre [, és a dir, són diàmetres (figura EIII 35, esquerra)], els quatre segments AE, EC, DE i EB són iguals.

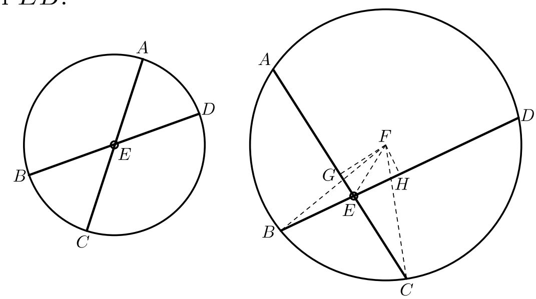


FIGURA EIII 35

En conseqüència, el rectangle de costats AE i EC és equivalent al rectangle de costats DE i EB.[731] ♠

b) Suposem, doncs, que els dos segments AC i BD no passen pel centre (figura EIII 35, dreta).

Sigui F el centre del cercle $\circ ABCD$. [EIII 1]

Des de F, tirem [els segments] FG i FH perpendiculars als segments AC i BD, respectivament. [EI 12]

Considerem els segments FB, FC i FE. [P 1]

---

geu el problema 36 (pàgina 65).

728. És la «invariància de la potència» d'un punt a una circumferència, si entenem per «potència» precisament l'àrea del rectangle que formen les dues parts d'una corda que passa pel punt en qüestió. Val la pena observar que Euclides estableix aquesta propietat abans d'haver assentat la teoria de la proporció i la semblança de triangles, cosa que faria que la demostració fos molt més senzilla. Vegeu el problema 38 (pàgina 65). Però Euclides usa el mètode tangram, és a dir, EII 5 i 6. I, curiosament, aquestes dues proposicions són les del llibre II que Euclides usa al llibre III. Per això, aquest llibre és gairebé independent d'aquell.

729. En el sentit de 'té la mateixa àrea'.

730. A la demostració usa la disjunció de casos.

731. Vegeu la nota 496 (pàgina 148).

Ara, atès que el segment GF, que passa pel centre, és perpendicular a la corda AC, que no hi passa, la dimidia. [EIII 3] És a dir, AG i GC són iguals.

Aleshores, atès que G divideix el segment AC en dues parts iguals i E [el divideix] en dues de diferents, el rectangle de costat AE i EC més el quadrat de costat EG és igual al [quadrat] de costat GC.[732] [EII 5]

Afegim a tots dos [el quadrat] de costat GF.

Tenim que el [rectangle] format per AE i EC més [la suma de] els quadrats de costats GE i GF equival a la suma dels quadrats de costats CG i GF. [Nc 2]

Però el [quadrat] de costat FE equival a la [suma dels quadrats] de costats EG i GF [EI 47] i el [quadrat] de costat FC equival a la [suma dels quadrats] de costats CG i GF. [EI 47]

En definitiva, el [rectangle] de [costats] AE i EC més el [quadrat] de costat EF equival al [quadrat] de costat FC, [Nc 1] i FC [és] igual a FB.

Tenim, doncs, que el [rectangle] de [costats] AE i EC més el [quadrat] de costat EF equival al [quadrat] de costat FB. [Nc 1]

[Raonant] anàlogament, el [rectangle] de [costats] DE i EB més el [quadrat] de costat EF equival al [quadrat] de costat FB.

En definitiva, doncs, el [rectangle] de [costats] AE i EC més el [quadrat] de costat EF equival al rectangle de costats DE i EB més [el quadrat] de costat FE. [P 1]

Sostraiem, de tots dos, el quadrat de costat EF.

Els romanents són iguals. [Nc 3]

I això és el que volíem demostrar. ♠ ♠

EIII 36. *Prenem un punt de l'exterior d'un cercle i tirem dos segments [radials] cap al cercle, [l'un] que el talla i [l'altre] tangent. Resulta que el rectangle de costats el segment sencer i la part del segment que queda fora del cercle, entre el punt i la part còncava de la circumferència, equival al quadrat de costat el [segment] tangent.*[733]

---

732. Heus aquí el mètode tangram.

733. Estableix la «invariància» de la potència d'un punt a una circum-

Sigui D un punt exterior al cercle $\bigcirc ABC$.

Considerem dos segments, $DC[A]$ i DB, que radien del punt D cap al cercle $\bigcirc ABC$.

Suposem que [el segment] DCA talla el cercle $\bigcirc ABC$ i BD [hi] és tangent. [Eiii 17]

Afirmo que el rectangle de costats AD i DC és igual [en àrea] al quadrat de [costat] DB.

[*Demostració*.] Una de dues:

a) $[D]CA$ passa pel centre, o

b) no ho fa.[734]

a) D'antuvi, suposem que hi passa.

Sigui F el centre del cercle $\bigcirc ABC$. [Eiii 1]

Considerem [el radi] FB. [P 1]

L'[angle] $\widehat{FBD}$ és un angle recte. [Eiii 18]

Aleshores, atès que [el punt] F dimidia el segment AC i s'hi afegeix CD, el rectangle [de costats] AD i DC més el quadrat de [costat] FC equival al [quadrat] de [costat] FD, [Eii 6]

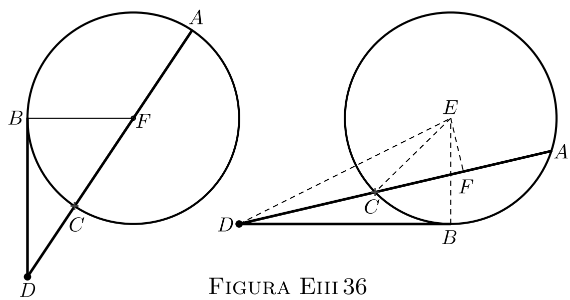


Figura Eiii 36

i [els radis] FC i FB [són] iguals. [Di 15]

Per tant, el [rectangle] de [costats] AD i DC més el [quadrat] de [costat] FB equival al [quadrat] de [costat] FD. [Nc 1 i 2]

---

ferència. Descartes l'usa a la *Géométrie* per a resoldre les equacions de segon grau. Vegeu Pla i Viader (1999), p. xl i 20–22.

734. Usa la distinció de casos. Tots dos casos els estableix emprant el mètode tangram. Si bé la teoria de la proporció, que permet usar la semblança de triangles, hauria estat més simple, no la pot usar perquè encara no en disposa. És, de bell nou, una demostració sotmesa a l'esdevenidor històric de la geometria grega.

Però el [quadrat] de [el segment] FD equival a la suma [dels quadrats] de [costats] FB i BD [junts]. [EIII 47]

Per tant, el [rectangle] de [costats] AD i DC més el [quadrat] de [costat] FB és igual a la suma [dels quadrats] de [costats] FB i BD [junts]. [Nc 1]

De les dues [sumes], en sostraiem el [quadrat] de [costat] FB
i obtenim la igualtat dels romanents, [Nc 3]
és a dir, l'equivalència del [rectangle] de [costats] AD i DC
i el [quadrat] de la tangent BD. ♠

b) Suposem, en canvi, que DCA no passa pel centre del cercle $\bigcirc ABC$.

Determinem el centre E del cercle $\bigcirc ABC$ [EIII 1]
i considerem el [segment] EF perpendicular al [segment] AC. [EI 12]

Unim EB, EC i ED. [P 1]

L'[angle] $\widehat{EBD}$ [és] un angle recte. [EIII 18]

I, atès que el segment EF, que passa pel centre,
és perpendicular al segment AC, que no hi passa, el dimidia, [EIII 3]
i, per tant, [els segments] AF i FC són iguals.

Ara, atès que el punt F dimidia el segment AC i [el segment] CD el prolonga,
resulta que el [rectangle] de [costats] AD i DC més el [quadrat] de [costat] FC equival al [quadrat] de [costat] FD. [EII 6]

Afegim el [quadrat] de [costat] FE a tots dos.

D'això en resulta que el [rectangle] de [costats] AD i DC més els [quadrats] de [costats] CF i FE [junts] equival als [quadrats] de [costats] FD i FE [junts]. [Nc 2]

Però, atès que l'angle $\widehat{EFC}$ és recte,
el [quadrat] de [costat] EC equival als [quadrats de costats] CF i FE [junts]. [EI 47]

I [, per les mateixes raons,] el [quadrat] de [costat] ED equival als [quadrats de costats] DF i FE [junts]. [EI 47]

Per tant, el [rectangle] de [costats] AD i DC més el [quadrat] de [costat] EC equival al [quadrat] de [costat] ED. [Nc 1 i 2]

Però [els segments] EC i EB [són] iguals.

En conseqüència, el [rectangle] de [costats] AD i DC més el [quadrat] de [costat] EB equival al [quadrat] de [costat] ED. [Nc 1 i 2]

I, atès que l'angle $\widehat{EBD}$ és un angle recte,
els [quadrats] de [costats] EB i BD [junts] equivalen al [quadrat] de [costat] ED. [EI 47]

Així doncs, el [rectangle] de [costats] AD i DC més el [quadrat] de [costat] EB equival als [quadrats de costats] EB i BD [junts]. [Nc 1 i 2]

Ara sostraiem de tots dos el [quadrat] de [costat] EB.

D'això en resulta que els romanents —[el rectangle de costats] AD i DC i el [quadrat] de [costat] BD— són equivalents. [Nc 3] ♠

I això és el que volíem demostrar. ♠

EIII 37. *Considerem un punt exterior a un cercle i dos dels segments que radia sobre el cercle. Suposem que un talla el cercle i l'altre hi incideix. Suposem que el* [*rectangle*] *de* [*costats*] *el* [*segment*] *sencer que talla* [*el cercle*] *i el* [*tros del segment*] *que talla el cercle però es troba fora, entre el punt i la part còncava de la circumferència, equival al quadrat del segment que incideix sobre el cercle. Aleshores, el segment incident és tangent a la circumferència del cercle.*[735]

Siguin D un punt exterior a un cercle $\bigcirc ABC$,
i DCA i DB dos segments que radien del punt D cap al cercle $\bigcirc ABC$.

Suposem que [el segment] DCA talla el cercle i, en canvi,
[el segment] DB hi incideix de manera que el [rectangle] de [costats] AD i DC és equivalent al [quadrat] de [costat] DB.

Afirmo que el segment DB és tangent al cercle.

a) [*Demostració*.] Considerem DE, una tangent a la circumferència $\bigcirc ABC$, [EIII 17]
i determinem el centre F del cercle. [EIII 1]

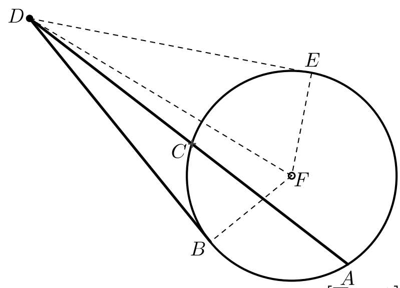


FIGURA EIII 37

Unim FE, FB i FD. [P 1]

735. Aquesta proposició estableix que la «potència d'un punt a una circumferència» caracteritza la tangència d'un segment que passa pel punt. Euclides usa aquest fet en la construcció del pentàgon regular [EIV 11].

El [angle] $\widehat{FED}$ és un angle recte. [E III 18]

Atès que DE és tangent al cercle $\circ ABC$ i [el segment] DCA el talla,
resulta que el [rectangle] de [costats] AD i DC equival al [quadrat] de [costat] ED. [E III 36]

I [, per hipòtesi,] el [rectangle] de [costats] AD i DC també equival al [quadrat] de [costat] DB.

Per tant, el [quadrat] de [costat] DE equival al [quadrat] de [costat] DB [Nc 1]
i, de retruc, [els segments] DE i DB són iguals.[736]

Però [els radis] FE i FB també ho són. [D I 15]

D'això en resulta que els segments DE i EF són iguals als segments DB i BF [, respectivament].

I, a més, la base FD és comuna.

Per tant, els angles $\widehat{DEF}$ i $\widehat{DBF}$ són iguals. [E I 8]

Però l'angle $\widehat{DEF}$ és recte.

En conseqüència, l'angle $\widehat{DBF}$ també ho és. [Nc 1]

Prolonguem FB fins a aconseguir un diàmetre. [P 2]

Però, si un segment rectilini és perpendicular a un diàmetre per un dels extrems, és tangent [a la circumferència]. [E III 16, porisma]

Així doncs, [el segment] DB és tangent a la circumferència del cercle $\circ ABC$. ♠

Passa el mateix si el centre es troba a [el segment] AC. ♠

I això és el que volíem demostrar. ♠

A.1.4 Llibre quart: E IV

Comentaris al llibre IV. El llibre IV està dedicat a construir, amb regle i compàs, els polígons regulars de tres, quatre, cinc,[737] sis i quinze costats inscrits en un cercle i circumscrits p. 43

736. Vegeu la nota 496 (pàgina 148).

737. La importància que Euclides concedeix al pentàgon regular queda palesa en el fet que hi dedica cinc proposicions específiques.

a una circumferència, és a dir, a establir-ne l'existència.[738] Les propietats relatives a aquests polígons regulars constitueixen «elements» del llibre XIII i, en particular, d'EXIII 18.

Tots els enunciats són problemes, i solament el primer i el desè esdevenen elements auxiliars, és a dir, lemes. En concret, EIV 1, que està subjecte al diorisma que imposa EIII 15, lliga amb DIV 7 i, de fet, està vinculat amb EI 2, ja que «transporta segments donats adaptant-los a una circumferència donada».[739] I EIV 10 és, efectivament, la construcció prèvia que necessita Euclides a EIV 11 per a construir el pentàgon regular.

En aquest llibre també es mostra la manera de fer la circumferència inscrita en cada un dels polígons regulars suara esmentats i circumscrita a cada un.

Tanmateix, cal indicar que, com que podem dividir un angle per la meitat amb regle i compàs, tots els polígons regulars que podem aconseguir dimidiant els angles de polígons regulars ja construïts són construïbles.

En aquest sentit, no hi ha cap avenç fins que, a finals del segle XVIII, Carl Friedrich Gauss estableix que el polígon regular de disset costats —i altres— també és construïble amb regle i compàs.[740]

Com indica Marchini molt encertadament, el llibre IV és un apèndix d'una part de l'anterior. Observem que, als llibres III i IV, solament s'usa la meitat —en concret, vint-i-set— de les cinquanta-set proposicions prèvies (trenta-set proposicions i dos porismes al llibre III, i setze proposicions i dos porismes al llibre IV). Observem també que, per a establir les proposicions del llibre IV, només es necessiten sis proposicions dels llibres I i II —en concret, les EI 40 i EII 1, 9, 10, 12 i 13. I, per a acabar, no-

738. Algunes de les construccions que s'hi ofereixen són les mateixes que trobem en els manuals escolars, però no és així en el cas del pentàgon.

739. Vegeu la nota 749 (pàgina 240).

740. El resultat clou el llibre de GAUSS (1801).

tem que la resta de llibres dels *Elements* —V, VI, VII, VIII, IX, X, XI, XII i XIII— solament usen mitja dotzena de resultats d'aquest llibre, i aquesta utilització es concentra als tres darrers.[741]

A.1.4*a* Les definicions d'EIV (Ὅροι) p. 44

Comentaris. El llibre IV s'obre, com és habitual, amb les definicions. En aquest cas, en són set de molt simples que fan referència al que s'entén per figura «inscrita» en una altra figura i «circumscrita» a una altra figura, i en particular, respecte d'un polígon regular i d'un cercle.

[**Text de les definicions d'EIV**]

DIV 1. Una figura rectilínia *està inscrita* (ἐγγράφεσθαι) en una altra figura rectilínia quan els angles (ἑκάτης γωνιας) de la figura inscrita toquen (ἅπτηται) els costats respectius de l'altra.[742]

DIV 2. I, d'una manera anàloga, una figura rectilínia *està circumscrita* (περιγράφεσθαι) a una altra figura rectilínia quan els costats (ἑκάτης πλευράς) de la figura circumscrita toquen (ἅπτηται) els angles respectius[743] de l'altra.

DIV 3. Una figura rectilínia *està inscrita* (ἐγγράφεσθαι) en un cercle quan els angles de la figura inscrita toquen (ἅπτηται) la circumferència del cercle.

DIV 4. Una figura rectilínia *està circumscrita* (περιγράφεσθαι)[744] a un cercle quan els costats de la figura circumscrita són tangents (ἐφάπτεσ-

741. Vegeu MARCHINI (2006), p. 79.

742. De fet, són els vèrtexs dels angles de la figura inscrita els que toquen la circumscrita, s'hi troben.

743. Els vèrtexs.

744. Fixem-nos que Euclides distingeix entre les dues paraules «ἅπτηται» —'tocar'— i «ἐφάπτεσθαι» —'trobar'. Pel context, veiem que, en uns casos, significa 'pertànyer' i, en uns altres, 'ser tangent a'. Aristòtil diu: «El punt *N* toca una circumferència» (δεδομένης περιφερείας ἐφάψεται τὸ

ϑαι) a la circumferència del cercle.

Div 5. Anàlogament, un cercle *està inscrit* en una figura quan la circumferència toca cada un dels costats de la figura.[745]

Div 6. I un cercle *circumscriu* una figura quan la seva circumferència toca cada un dels angles de la figura.[746]

Div 7. Un segment *s'adapta*[747] *a un cercle* quan els seus extrems es troben a la circumferència.[748]

p. 44 A.1.4*b* Les proposicions d'Eiv

[*La construcció dels polígons regulars*]

Eiv 1. *Volem adaptar, a un cercle donat,*[749] *un segment igual a un segment donat més curt*[750] *que el diàmetre del cercle.*[751]

Siguin ○ABC un cercle donat i D un segment més curt que un diàmetre [del cercle]. [Eiii 15]

Volem aconseguir una corda del cercle ○ABC congruent amb el segment D.

N) i «[Un cercle] troba tots els angles» (ἀπσώ ἐφάψεται τῶ γωνιῶν). Vegeu Aristòtil (1996), llibre iii, capítol 5, § 5 i 13 (text C 11.9b_1, a Pla (2016*c*), p. 604 i 606).

745. És a dir: els costats de la figura circumscrita són tangents a la circumferència del cercle inscrit.

746. És a dir: la circumferència passa per tots els vèrtexs dels angles de la figura.

747. Usa el terme grec ἐναρμόζεσϑαι, que retrobem a Eiv 1.

748. De fet, Euclides estableix la definició de «corda». Una «corda» d'un cercle és un segment rectilini que uneix dos punts de la circumferència del cercle (sense passar pel centre).

749. Caldria precisar què entenem per «cercle» i «circumferència» donats. Si significa donar el «centre» i el «radi», no cal recórrer a Eiii 1. Però s'ha d'admetre, això sí, que tot radi, quan es prolonga suficientment, talla la circumferència en un altre punt. En canvi, si significa simplement donar «la circumferència», aleshores s'ha de determinar el centre de la circumferència i unir-lo amb un punt arbitrari per tal d'obtenir-ne un radi.

750. De fet, atès el cas *a* de la demostració, hauria de dir: «un segment que no supera el diàmetre.»

751. Hi ha, òbviament, una limitació: un diorisma que és un porisma immediat d'Ei 2 i 3. Vegeu Eiii 15.

Tirem el diàmetre BC.[752] [Nc 1 i 2, Eiii 1]

[*Demostració.*][753] *a*) Si el segment BC és igual al segment D, hem establert el que es demana, ja que, en aquest cas, el segment BC, que és igual a D, s'ha ajustat a la circumferència. ♠

b) D'altra banda, si BC és més gran que D, considerem CE congruent amb D. [Ei 2]

Amb centre C i radi CE, tirem el cercle $\circ EAF$, [P 3]

i unim CA.[754] [P 1]

Atès que el punt C és el centre del cercle $\circ EAF$,

els [dos] segments CE i CA són iguals [perquè són radis del cercle $\circ EAF$]. [Di 15]

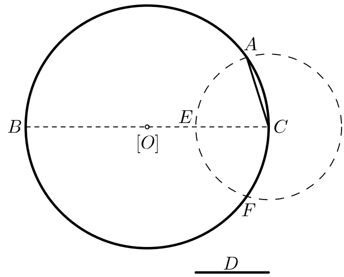


Figura Eiv 1

Però [els segments] CE i D són iguals.

Per tant, [els segments] CA i D també ho són. [Nc 1]

En conseqüència, CA és una corda del cercle $\circ ABC$ igual al segment D. ♠

I això és el que volíem demostrar. ♠

Eiv 2. *Volem inscriure, en un cercle donat, un triangle que tingui els mateixos angles que un triangle donat.*[755]

Siguin $\circ ABC$ i $\triangle DEF$ un cercle i un triangle donats.

---

752. S'ha de determinar el centre O del cercle [Eiii 1], unir un punt arbitrari B de la circumferència del cercle amb el centre O [P 1] i prolongar el segment obtingut BO fins que talli la circumferència [P 2] al punt C. Tanmateix, aquest punt està ben determinat, és l'altre vèrtex de l'hexàgon regular. I s'obté portant el radi BO a la circumferència a partir del punt B tres cops. Però l'hexàgon encara no s'ha construït (vegeu la proposició Eiv 15, pàgina 260). Tanmateix, és un porisma immediat d'Ei 1 i 9.

753. La demostració procedeix per distinció de casos.

754. De forma explícita, aquí Euclides usa un postulat que no ha enunciat mai, com ja hem comentat a la nota 269 (pàgina 88): «Quan un cercle té el centre en un extrem del diàmetre d'un altre cercle i el radi del primer és més curt que el diàmetre del segon, les circumferències corresponents es tallen necessàriament [en dos punts].»

755. Observem la vinculació, no explicitada, amb la semblança. En aquest sentit, lliga amb Evi 4.

Volem inscriure un triangle amb els mateixos angles que el triangle $\triangle DEF$ en el cercle $\bigcirc ABC$.

[*Demostració.*] Tirem el segment GH tangent al cercle $\bigcirc ABC$ pel punt A. [EIII 17]

Fem (l'angle) $\widehat{HAC}$, igual a l'angle $\widehat{DEF}$, sobre el segment AH [amb vèrtex] al punt A, [EI 23]
i (l'angle) $\widehat{GAB}$, igual a (l'angle) $\widehat{DFE}$, sobre el segment AG [amb vèrtex] al punt A. [EI 23]

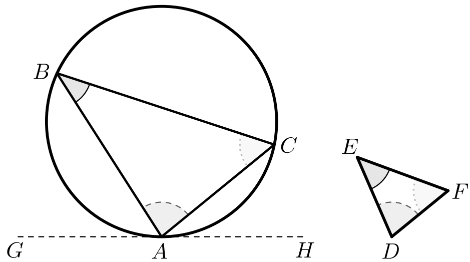


FIGURA EIV 2

Unim BC. [P 1]

Ara, atès que [el segment] AH és tangent a la circumferència del cercle $\bigcirc ABC$
i el segment AC és una corda [del cercle] amb un extrem al punt de contacte A,
(l'angle) $\widehat{HAC}$ és igual a l'angle $\widehat{ABC}$ sobre el segment alternat del cercle. [EIII 32]

Però els angles $\widehat{HAC}$ i $\widehat{DEF}$ són iguals.

En conseqüència, els angles $\widehat{ABC}$ i $\widehat{DEF}$ també ho són. [Nc 1]

Per les mateixes raons, els [angles] $\widehat{ACB}$ i $\widehat{DFE}$ són iguals i [els angles] que romanen, $\widehat{BAC}$ i $\widehat{EDF}$, també ho són. [EI 32 i Nc 3]

[D'això en resulta que els triangles $\triangle ABC$ i $\triangle DEF$ tenen els mateixos angles i [el triangle] $\triangle ABC$ és [un triangle] inscrit en el cercle $\bigcirc ABC$.]

I això és el que volíem demostrar. ♠

EIV 3. *Volem circumscriure a un cercle donat un triangle que té els mateixos angles que un triangle donat.*

Siguin $\bigcirc ABC$ i $\triangle DEF$ un cercle i un triangle donats.

Volem circumscriure un triangle amb els mateixos angles que el triangle $\triangle DEF$ al cercle $\bigcirc ABC$.

Considerem el centre K del cercle $\bigcirc ABC$ [EIII 1]
i un radi KB arbitrari [del cercle $\bigcirc ABC$]. [P 1]

Ara, construïm els angles $\widehat{BKA}$ i $\widehat{BKC}$ iguals als angles $\widehat{DEG}$ i $\widehat{DFH}$, amb els vèrtexs a K i un costat al segment KB, respectivament. [Ei 23]

Considerem els (segments) tangents LAM, MBN i NCL al cercle $\bigcirc ABC$ pels punts A, B i C, respectivament.[756]

[Ei 11 i Eiii 16, porisma] ♣

[*Demostració*.] Com que [els segments] LM, MN i NL són tangents al cercle $\bigcirc ABC$ pels punts de tangència respectius A, B i C,

[els segments] KA, KB i KC són radis,

i els angles amb vèrtexs als punts A, B i C són rectes. [Eiii 18]

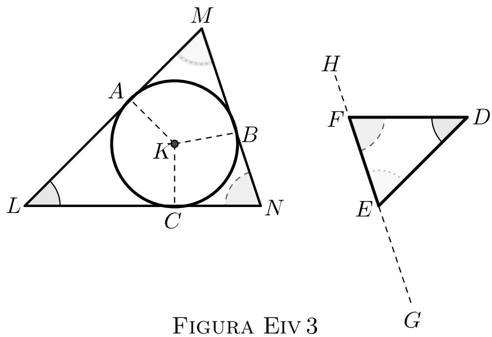


Figura Eiv 3

I atès que [la suma dels] quatre angles del quadrilàter $\square AMBK$ val quatre angles rectes, [Ei 32]

ja que [el quadrilàter] $\square AMBK$ consta de dos triangles,[757]

[P 5 i Eiii 22]

i els dos angles $\widehat{KAM}$ i $\widehat{KBM}$ són rectes,

resulta que els altres dos, $\widehat{AKB}$ i $\widehat{AMB}$, [junts] fan dos angles rectes.

[Ei 31 i Nc 2]

Però els angles $\widehat{DEG}$ i $\widehat{DEF}$ [junts] fan dos angles rectes. [Ei 13]

En conseqüència, [els angles] $\widehat{AKB}$ i $\widehat{AMB}$ [junts] són iguals als [angles] $\widehat{DEG}$ i $\widehat{DEF}$ [junts]. [P 4 i Nc 1]

I l'un, (l'angle) $\widehat{AKB}$, és igual a (l'angle) $\widehat{DEG}$ [, per construcció].

Aleshores, (l'angle) romanent $\widehat{AMB}$ és igual al [angle] romanent $\widehat{DEF}$. [Nc 3]

Anàlogament, podem establir que (l'angle) $\widehat{LNB}$ és igual a (l'angle) $\widehat{DFE}$.

756. Podem veure que aquests tres segments tangents es tallen en tres punts L, M i N que determinen un triangle. Vegeu el problema 39 (pàgina 65).

757. Només cal unir els punts M i K [P 1].

I, finalment, (l'angle) que queda, $\widehat{MLN}$, és igual a (l'angle) que queda, $\widehat{EDF}$. [Ei 32]

En definitiva, els triangles $\triangle LMN$ i $\triangle DEF$ tenen els mateixos angles i, a més, circumscriuen el cercle $\circ ABC$ [, per construcció i definició].

I això és el que volíem demostrar. ♠

Eiv 4. *Volem inscriure un cercle en un triangle donat.*

Sigui $\triangle ABC$ un triangle donat.

Volem inscriure-hi un cercle.

[*Construcció.*] Considerem les bisectrius dels angles $\widehat{ABC}$ i $\widehat{ACB}$. [Ei 9]

Es tallen pel punt D.[758] [P 5]

Considerem els segments DE, DF i DG perpendiculars als costats [del triangle] AB, BC i CA [, respectivament]. [Ei 12]

En conseqüència, atès que [, per construcció,] els angles $\widehat{ABD}$ i $\widehat{CBD}$ són iguals

i els angles $\widehat{BED}$ i $\widehat{BFD}$ també [, ja que són angles rectes], [P 4]

resulta que els triangles $\triangle EBD$ i $\triangle FBD$ tenen dos angles iguals i un costat comú:

el que subtendeix un dels angles [rectes] iguals i que comparteixen tots dos triangles, és a dir, el costat BD. [P 1]

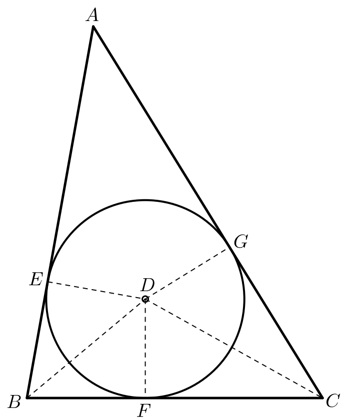


Figura Eiv 4

Per tant, aquests triangles també tindran iguals els altres costats [corresponents]. [Ei 26]

Així doncs, [els segments] DE i DF també [són] iguals,

i, per les mateixes [raons], [els segments] DG i DF també.

I, per tant, els tres segments DE, DF i DG són iguals entre si. [Nc 1]

758. Vegeu el problema 40 (pàgina 65).

En conseqüència, el cercle de centre D i radi un [dels punts] E, F o G[759] passarà [pels altres punts]. [P 3, DI 15 i EIII 10[760]] ♣

[Afirmo que] els segments AB, BC i CA són tangents a la circumferència del cercle $\bigcirc EFG$,

atès que els angles a [els punts] E, F i G són rectes.

[*Demostració.*] [En efecte,] si [la circumferència] talla [els segments AB, BC i CA],[761]

el segment perpendicular a un diàmetre del cercle des d'un extrem es troba a l'interior del cercle. I hem vist que això és absurd. [EIII 16]

Aleshores, el cercle de centre D i radi $[D]E, [D]F$ o $[D]G$[762]

no talla [els segments] AB, BC i CA.

En conseqüència, $[AB, BC$ i $CA]$ són tangents a la circumferència del cercle.

Per tant, el cercle està inscrit en el triangle $\triangle\, ABC$.

Hem inscrit, doncs, un cercle com el cercle $\bigcirc EFG$ [de la figura].

I això és el que volíem demostrar. ♠[763]

EIV 5. *Volem circumscriure un cercle a un triangle donat.*

Sigui $\triangle\, ABC$ un triangle donat.

Volem circumscriure-hi un cercle.

[*Construcció i demostració.*] Dimidiem els costats AB i AC. [EI 10]

Siguin D i E els punts mitjans corresponents.

---

759. Amb centre a D i passant per un dels punts E, F o G, o amb radi igual a DE, DF o DG.

760. Vegeu la nota 655 (pàgina 199): tres radis determinen una circumferència.

761. Hipòtesi de l'absurd.

762. O sigui, de centre D i passant per un dels punts E, F o G.

763. Aquesta demostració implica, senzillament, que «les tres bisectrius d'un triangle es tallen en un punt que és l'"incentre" del triangle —el centre del cercle inscrit». Un altre resultat immediat que se'n deriva és que l'àrea d'un triangle es pot expressar com la d'un rectangle; és a dir, si S designa l'àrea del triangle, p el semiperímetre i r el radi del cercle inscrit en el triangle, aleshores $S = p \times r$. I, de retruc, si el triangle és rectangle de catets a, b i hipotenusa c, aleshores el radi del cercle inscrit s'obté amb $r = \frac{a\times b}{a+b+c} = \frac{a\times b}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}}$. Després d'això ens podem preguntar si l'expressió $S = p \times r$ val per a tot polígon. Vegeu el problema 42 (pàgina 65).

Des d'aquests punts, tirem els segments DF i EF perpendiculars a AB i AC [, respectivament]. [Ei 11]

Aquests segments es tallen en un punt F[764] [P 5]

a) de l'interior del triangle $\triangle ABC$,

b) situat damunt el costat BC, o

c) exterior al triangle $\triangle ABC$.[765] ♣

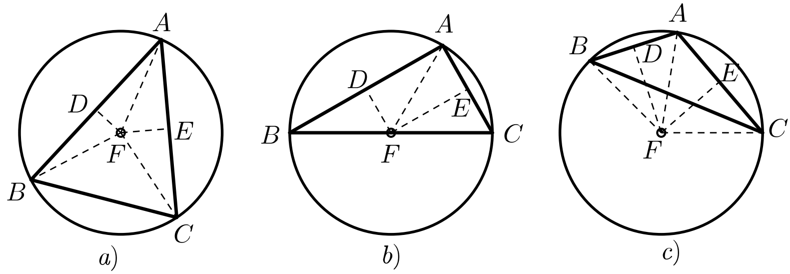


Figura Eiv 5

a) En primer lloc, suposem que els segments es troben al punt F de l'interior del triangle [figura a].

Considerem els segments FB, FC i FA. [P 1]

Atès que els segments AD i DB són iguals i DF comú, i que els angles [que formen] són rectes, les bases AF i FB són iguals. [P 4 i Ei 4]

Anàlogament, establim que els segments CF i AF són iguals.

Per tant, els segments FB i FC també ho són. [Nc 1]

En conseqüència, els [tres] segments FA, FB i FC són iguals [Nc 1] i, per tant, la circumferència de centre F que passa per un dels punts A, B o C passa pels altres dos. [P 3 i la nota 760[766]]

I així hem fet el cercle que circumscriu el triangle $\triangle ABC$. ♠

764. Un cop s'ha determinat aquest punt de tall que, de fet, és el centre, la construcció queda establerta. Però cal demostrar que, efectivament, és el centre del cercle que es vol construir. De retruc, queda establert que les tres «mediatrius» del triangle —les perpendiculars als costats pels punts mitjans— es tallen en un punt, el «circumcentre».

765. Distinció de casos.

766. Ja no tornarem a insistir més en aquest fet: el postulat P 5 implica que tres punts determinen una circumferència i només una. I, de fet, són equivalents.

b) Però, en segon lloc, si DF i FE es tallen pel punt F de [el segment] BC [figura *b*],
tirem el segment AF. [P 1]

D'una manera anàloga a l'anterior cas, establim que F és el centre de la circumferència que circumscriu el triangle $\triangle ABC$. ♠

c) Però, en tercer lloc, si DF, FE es tallen per [el punt] F de l'exterior del triangle $\triangle ABC$ [figura *c*],
tirem els segments AF, BF i CF. [P 1]

De bell nou, atès que AD i DB són iguals, DF comú
i els angles [que formen] rectes,
les bases AF i BF són iguals. [P 4 i EI 4]

Anàlogament, establim que els segments CF i AF són iguals.

Per tant, els segments FB i FC també ho són. [Nc 1]

En conseqüència, la circumferència de centre F i un dels radis FA, FB o FC passa pels altres dos punts.

Així hem aconseguit, ara també, la circumferència que circumscriu el triangle $\triangle ABC$. ♠

I hem pogut circumscriure una circumferència a un triangle donat.
I això és el que volíem demostrar. ♠

EIV 5, porisma. És clar que *quan el centre cau* a) *dins el triangle, l'angle* $\widehat{BAC}$ [*té el vèrtex*] *en un segment* [*circular*] *de més de mig cercle i, per tant, és agut;* b) *al segment* BC, *l'angle* $\widehat{BAC}$ [*té el vèrtex*] *en un segment* [*circular*] *de mig cercle i, per tant, és recte; i, finalment,* c) *fora del triangle, l'angle* $\widehat{BAC}$ [*té el vèrtex*] *en un segment* [*circular*] *de menys de mig cercle i, per tant, és obtús.* [EIII 31]

De retruc, *els segments* DF *i* EF *cauen* a) *dins el triangle,* b) *damunt el segment* BC, *o* c) *fora del triangle.*[767]

I això és el que volíem demostrar. ♠

767. Hi trobem una certa analogia —llunyana, si es vol— amb la determinació de les «tres» lúnules d'Hipòcrates de Quios. Vegeu PLA (2016*c*), § 3.4.7.4, p. 244 i següents, i textos B 7.7*e*, p. 489 i següents.

EIV 6. *Volem inscriure un quadrat en un cercle donat.*[768]
Sigui $\bigcirc ABCD$ el cercle donat.

Volem inscriure-hi un quadrat.

[*Construcció.*] Siguin AC i BD dos diàmetres perpendiculars del cercle $\bigcirc ABCD$.[769] [EIII 1, P 2 i EI 11]

Unim AB, BC, CD i DA. [P 1] ♣

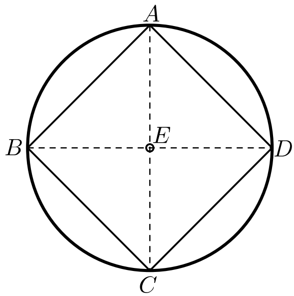


FIGURA EIV 6

[*Demostració.*] *a*) Atès que E [és] el centre [del cercle],
[els radis] BE i ED són iguals, [DI 15]
i el [segment] EA és comú i perpendicular a BD.

Per tant, els angles [$\widehat{AEB}$ i $\widehat{AED}$] que formen són rectes. [DI 10]

D'això en resulta que les bases AB i AD són iguals. [P 4 i EI 4]

Per les mateixes raons, BC i CD són iguals a AB i AD [, respectivament].

En conseqüència, el quadrilàter ⏢ $ABCD$ és equilàter.
[Nc 1 i DI 22] ♠

Afirmo també que els quatre angles són rectes. [DI 10]

b) Atès que el segment BD és un diàmetre del cercle $\bigcirc ABCD$, ⌓ BAD és un semicercle.

Així doncs, l'angle $\widehat{BAD}$ [és] un angle recte. [EIII 31]

Per les mateixes raons, cadascun dels [angles] $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCD}$ i $\widehat{CDA}$ és un angle recte.

En conseqüència, el quadrilàter ⏢ $ABCD$ té els quatre angles rectes. ♠

A més, [és] equilàter. Per tant, és un quadrat [DI 22]
que està inscrit en el cercle $\bigcirc ABCD$.

I això és el que volíem demostrar. ♠

---

768. Recordem que l'existència dels quadrats s'ha establert en la proposició EI 46.

769. Abans de tota altra cosa, determinem el centre [EIII 1]. Després tirem una corda que passi pel centre —o sigui, un diàmetre. I, seguidament, tracem una perpendicular al diàmetre pel centre [EI 11].

EIV 7. *Volem circumscriure un quadrat a un cercle donat.*
Sigui ○$ABCD$ el cercle donat.

Volem circumscriure-hi un quadrat.

[*Construcció.*] Considerem dos diàmetres AC i BD del cercle ○$ABCD$ perpendiculars [entre si] [EIII 1, P 2 i EI 11]
i [els segments] FG, GH, HK i KF, tangents al cercle ○$ABCD$ pels punts A, B, C i D [, respectivament].[770] [EIII 17] ♣

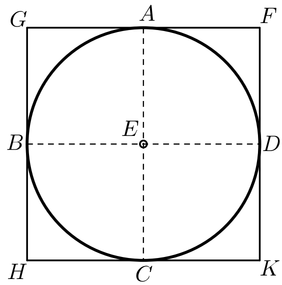


FIGURA EIV 7

[*Demostració.*] Atès que FG és tangent a la circumferència del cercle ○$ABCD$
i EA uneix el centre E amb el punt de tangència A,
els angles del vèrtex A són rectes. [EIII 18]

Per les mateixes raons, els angles [amb el vèrtex] als punts B, C i D també ho són.

Com que els angles $\widehat{AEB}$ i $\widehat{EBG}$ són rectes,
els segments GH i AC són paral·lels. [P 4 i EI 28]

Per les mateixes [raons], [els segments] AC i FK també són paral·lels.

En conseqüència, [els segments] GH i FK també ho són. [EI 30]

Anàlogament, podem provar que [els segments] GF i HK són [tots dos] paral·lels a BED.

Aleshores, les figures ▱GK, ▱GC, ▱AK, ▱FB i ▱BK són paral·lelograms.

I [els segments] GF i HK, i GH i FK són paral·lels. [EI 34]

Com que [els segments] AC i BD són iguals [ja que són diàmetres],
AC també [és igual] a [cadascun dels segments] GH i FK,
i BD a [cadascun dels segments] GF i HK. [EI 34]

[I els segments GH i FK són iguals als segments GF i HK, respectivament.] [Nc 1]

I el quadrilàter ⏢$FGHK$ és equilàter. ♠

Ara afirmo que tots els angles de [el quadrilàter] ⏢$FGHK$ són rectes.

770. Vegeu la nota d'EIII 34 (pàgina 231).

Atès que [la figura] $\varparallelogram GBEA$ és un paral·lelogram i (l'angle) $\widehat{AEB}$ és un angle recte,
(l'angle) $\widehat{AGB}$ també ho és. [Ei 34]

I, anàlogament, podem veure que els angles [amb el vèrtex] a [els punts] H, K i F són rectes.

Per tant, [el paral·lelogram] $\varparallelogram FGHK$ és equilàter i té tots els angles rectes. ♠

En conseqüència, és un quadrat. [Di 22]

I, per construcció, circumscriu el cercle $\circ ABCD$.
I això és el que volíem demostrar. ♠

Eiv 8. *Volem inscriure un cercle en un quadrat donat.*
Sigui $\square\, ABCD$ un quadrat donat.
Volem inscriure-hi un cercle.
[*Construcció.*] Dimidiem AD i AB pels punts E i F [, respectivament]. [Ei 10]

I, pels punts E i F, tirem els segments paral·lels, EH i FK, als costats AB o CD i AD o BC [, respectivament]. [Ei 30 i 31][771] ♣

[*Demostració.*] Aleshores [les figures] $\varparallelogram AK$, $\varparallelogram KB$, $\varparallelogram AH$, $\varparallelogram HD$, $\varparallelogram AG$, $\varparallelogram GC$, $\varparallelogram BG$ i $\varparallelogram GD$ són paral·lelograms,
i els respectius costats oposats [són] manifestament iguals. [Ei 34]

I, atès que [els segments] AD i AB són iguals
i AE i AF valen la meitat de AD i de AB, respectivament, [els segments] AE i AF són iguals. [Nc 6′]

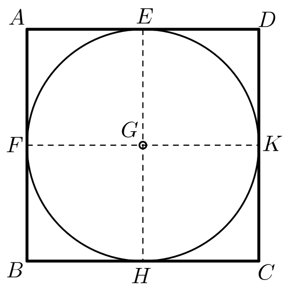


Figura Eiv 8

Per tant, els [costats] oposats també [ho són].

I [els segments] FG i GE també.

Anàlogament, podem establir que cadascun dels segments GH i GK és igual a cadascun dels (segments) FG i GE.

En conseqüència, els quatre (segments) GE, GF, GH i GK [són] iguals entre si. [Nc 1]

771. Cada parella de segments paral·lels talla, òbviament, l'altra. [P 5].

D'això en resulta que el cercle amb centre al punt G i radi en un dels [punts] E, F, H o K també passa pels altres punts. [P 3 i Di 15]

I, atès que els angles als [vèrtexs] E, F, H i K són rectes, els segments AB, BC, CD i DA són tangents [a la circumferència del cercle],
ja que si [la circumferència de] el cercle talla [els segments] AB, BC, CD o DA,[772]
aleshores un segment perpendicular a un diàmetre en un dels extrems té una part dins el cercle. I això és absurd. [Eiii 16]

Per tant, el cercle amb centre al punt G i radi en un dels [punts] E, F, H o K no talla els segments AB, BC, CD i DA.

En conseqüència, els toca i l'hem inscrit en el quadrat $\square\, ABCD$.
I això és el que volíem demostrar. ♠

Eiv 9. *Volem circumscriure un cercle a un quadrat donat.*

Sigui $\square\, ABCD$ el quadrat donat.

Volem circumscriure-hi un cercle.

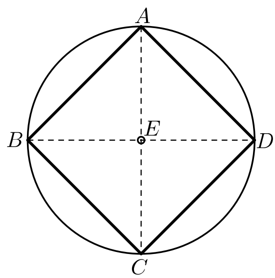


Figura Eiv 9

[*Construcció.*] Unim AC i BD.

Es tallen pel punt E.[773] [P 1 i 5] ♣

[*Demostració.*] Atès que DA i AB són iguals i AC [és] comú,
els dos (segments) DA i AC són iguals als dos (segments) BA i AC,
i les bases DC i BC [són] iguals.

Aleshores, els angles $\widehat{DAC}$ i $\widehat{BAC}$ també ho són. [Ei 8]

En conseqüència, el segment AC dimidia l'angle $\widehat{DAB}$.

De forma similar, podem veure que els segments BD i AC[774] dimidien els angles $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCD}$ i $\widehat{CDA}$.

I, com que els angles $\widehat{DAB}$ i $\widehat{ABC}$ són iguals,
i [els angles] $\widehat{EAB}$ i $\widehat{EBA}$ són la meitat de [els angles] $\widehat{DAB}$ i $\widehat{ABC}$, respectivament,

772. Hipòtesi de l'absurd.
773. És el centre del cercle.
774. El text diu: «AC i BD» en lloc de BD i AC.

resulta que [els angles] $\widehat{EAB}$ i $\widehat{EBA}$ també són iguals. [Nc 6′]

Així doncs, els costats EA i EB són iguals. [EI 6]

Anàlogament, establim que els (segments) EA i EB són iguals a EC i ED.

En conseqüència, els quatre (segments) EA, EB, EC i ED són iguals entre si. [EI 1]

En definitiva, el cercle amb centre E i radi un dels segments A, B, C o D[775] passa també pels altres. [P 3 i DI 15]

Així doncs, [el cercle] circumscriu el quadrat $\square ABCD$.

I això és el que volíem demostrar. ♠

EIV 10. *Volem construir un triangle isòsceles amb cadascun dels* [*dos*] *angles de la base equivalent al doble de l'angle* [*del vèrtex*].[776]

[*Construcció.*] Considerem un segment AB[777] i [determinem] el punt C de manera que el rectangle de costats AB i BC sigui equivalent al quadrat de [costat] CA.[778] [EII 11]

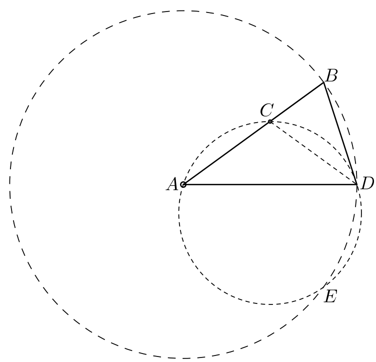


FIGURA EIV 10

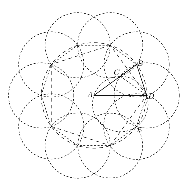
Tirem el cercle $\bigcirc BDE$ amb centre A i radi AB. [P 2]

Considerem ara el segment BD igual al segment AC. [EI 3]

I, atès que no supera [la longitud de] el diàmetre del cercle $\bigcirc BDE$, el podem inserir en el cercle $\bigcirc BDE$. [EIV 1]

775. Com que ha fixat el centre E, Euclides es refereix als radis EA, EB, EC i ED indicant solament l'altre extrem.

776. De fet, és l'«element sintètic», fruit de l'anàlisi, que li fa falta per a la resolució del problema següent [EIV 11] i per a mostrar la manera de construir el decàgon regular. La construcció del pentàgon n'és una conseqüència immediata. Vegeu la figura adjunta. Aquesta proposició lliga amb EII 11 i EVI 30.



777. Euclides accepta la possibilitat de considerar dos punts diferents.

778. Tallem el segment en mitjana i extrema raó.

Unim AD i DC,[779] [P 1] ♣
i fem el cercle $\circ ACD$ que circumscriu el triangle $\triangle ACD$. [EIV 5]
[*Demostració.*][780] Atès que el [rectangle] de [costats] AB i BC és igual a [el quadrat de costat] AC,
i que AC [és] igual a BD,
resulta que el [rectangle] de [costats] AB i BC ho és al [quadrat] de [costat] BD. [Nc 1]

El punt B es troba a l'exterior del cercle $\circ ACD$,
i de [el punt] B radien dos segments BA i BD cap al cercle $\circ ACD$.

[L'un] talla [el cercle als punts C i A] i [l'altre] troba [la circumferència del cercle al punt D].

I, a més, el [rectangle] de [costats] AB i BC és igual al [quadrat] de [costat] BD.

En conseqüència, [el segment] BD és tangent a [la circumferència de] el cercle $\circ ACD$. [EIII 37]

Per tant, atès que BD és tangent a [la circumferència del cercle]
i DC travessa [el cercle] des del punt de contacte D,
l'angle $\widehat{BDC}$ és igual a l'angle $\widehat{DAC}$ del segment alternat del cercle. [EIII 32]

En conseqüència, com que [els angles] $\widehat{BDC}$ i $\widehat{DAC}$ són iguals,
si afegim $\widehat{CDA}$ a tots dos,
(l'angle) total $\widehat{BDA}$ és igual als dos [angles] $\widehat{CDA}$ i $\widehat{DAC}$. [Nc 2]

Però l'angle extern [d'un triangle] $\widehat{BCD}$ és igual als angles $\widehat{CDA}$ i $\widehat{DAC}$ [junts]. [EI 32]

Aleshores, [els angles] $\widehat{BDA}$ i $\widehat{BCD}$ també ho són. [Nc 1]

Però [els angles] $\widehat{BDA}$ i $\widehat{CBD}$ són iguals,
ja que [el costat] AD ho és a [el costat] AB. [EI 5]

Així doncs, (l'angle) $\widehat{DBA}$ també és igual a (l'angle) $\widehat{BCD}$.

En conseqüència, els tres [angles] $\widehat{BDA}$, $\widehat{DBA}$ i $\widehat{BCD}$ ho són entre si.

I, atès que l'angle $\widehat{DBC}$ és igual a (l'angle) $\widehat{BCD}$,
el costat BD també ho és al costat DC. [EI 6]

779. Obtenim el triangle $\triangle ACD$.

780. Molta atenció a l'ús de la notació dels angles; s'usen expressions diferents per a referir-se a un mateix angle i això complica la comprensió del text. Vegeu la nota 377 (pàgina 112).

Però hem suposat que [el segment] BD [és] igual al [segment] CA.

Així doncs, [els segments] CA i CD són iguals
i, en definitiva, els angles $\widehat{CDA}$ i $\widehat{DAC}$ també. [Ei 5]

Aleshores, tenim que [els angles] $\widehat{CDA}$ i $\widehat{DAC}$ [junts] valen el doble que (l'angle) $\widehat{DAC}$.

Però [l'angle extern] $\widehat{BCD}$ [és] igual a [els angles] $\widehat{CDA}$ i $\widehat{DAC}$ [junts]. [Ei 32]

Per tant, (l'angle) $\widehat{BCD}$ val el doble que (l'angle) $\widehat{CAD}$
i $\widehat{BCD}$ [és] igual a cadascun [dels angles] $\widehat{BDA}$ i $\widehat{DBA}$.

En definitiva, $\widehat{BDA}$ i $\widehat{DBA}$ són dobles de (l'angle) $\widehat{DAB}$.

De tot això en resulta que hem construït un triangle isòsceles $\triangle ABD$ en el qual els [dos] angles de la base BD valen el doble que l'altre [angle, l'angle al vèrtex].

I això és el que volíem demostrar. ♠

Eiv 11. *Volem inscriure un pentàgon regular en un cercle donat.*[781]

Volem inscriure un pentàgon regular en el cercle $\bigcirc ABCDE$.

[*Construcció.*] Considerem el triangle isòsceles $\triangle FGH$ amb els angles a [els vèrtexs] G i H dobles de (l'angle) a [el vèrtex] F. [Eiv 10]

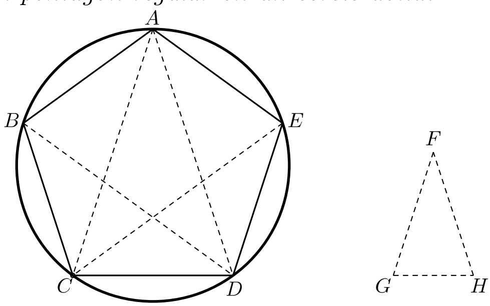


Figura Eiv 11

Ara, inscrivim, en el cercle $\bigcirc ABCDE$, el triangle $\triangle ACD$ que té els mateixos angles que el triangle $\triangle FGH$,
de manera que (l'angle) $\widehat{CAD}$ sigui igual a l'angle a [el vèrtex] F
i els [angles] $\widehat{ACD}$ i $\widehat{CDA}$ iguals a [els angles] a [els vèrtexs] G i H, respectivament.[782] [Eiv 2] ♣

781. Euclides diu: Εἰς τὸν δοθέντα κύηλον πεντάγωνον ἰσοπλερόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψψαι. Els termes *hexàgon*, *decàgon* i *pentadecàgon* «equiangles i equilàters» els hem traduït com a «regulars». N'és la definició.

782. Fixem-nos que construeix un triangle $\triangle ACD$, semblant al triangle $\triangle FGH$, sense recórrer a la teoria de la proporció (nota 755, pàgina 241).

[*Demostració.*] Aleshores, [els angles] $\widehat{ACD}$ i $\widehat{CDA}$ valen el doble que (l'angle) $\widehat{CAD}$.

Considerem les respectives bisectrius CE i DB de [els angles] $\widehat{ACD}$ i $\widehat{CDA}$ [EI 9]

i unim AB, BC, DE i EA. [P 1]

Aleshores, atès que els angles $\widehat{ACD}$ i $\widehat{CDA}$ són el doble de $\widehat{CAD}$,
i els segments CE i DB els dimidien,
els cinc angles $\widehat{DAC}$, $\widehat{ACE}$, $\widehat{ECD}$, $\widehat{CDB}$ i $\widehat{BDA}$ són iguals entre si [Nc 6′]
i angles iguals [inscrits en un cercle] determinen arcs de circumferència [$\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}, \overset{\frown}{DE}$ i $\overset{\frown}{EA}$] iguals. [EIII 26]

En conseqüència, les cinc cordes $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}, \overset{\frown}{DE}$ i $\overset{\frown}{EA}$ del cercle són iguals entre si. [EIII 29]

I, per tant, el pentàgon ⬠ $ABCDE$ és equilàter. ♠

Afirmo que també és equiangle.

b) Atès que l'arc de circumferència $\overset{\frown}{AB}$ és igual a l'arc de circumferència $\overset{\frown}{DE}$, afegim l'arc $B\overset{\frown}{C}D$ [a tots dos].

D'això en resulta que l'arc [conjunt] $A\overset{\frown}{BC}D$ és igual a l'arc conjunt $E\overset{\frown}{DC}B$. [Nc 2]

En definitiva, l'angle $\widehat{AED}$ [inscrit al cercle] subtendeix l'arc $A\overset{\frown}{BC}D$ i l'angle $\widehat{BAE}$ [inscrit al cercle] subtendeix l'arc $E\overset{\frown}{DC}B$.

Per tant, els angles $\widehat{BAE}$ i $\widehat{AED}$ són iguals. [EIII 27]

Per les mateixes raons, els angles $\widehat{ABC}, \widehat{BCD}$ i $\widehat{CDE}$ són també iguals a cada un dels angles $\widehat{BAE}$ i $\widehat{AED}$.

Així doncs, el pentàgon ⬠ $ABCDE$ és equiangle. ♠

I ja havíem establert que era equilàter.

I això és el que volíem demostrar. ♠

EIV 12. *Volem circumscriure un pentàgon regular a un cercle donat.*
Sigui ○$ABCDE$ el cercle donat.

Volem circumscriure-hi un pentàgon equilàter i equiangle.

[*Construcció.*] Siguin A, B, C, D i E els vèrtexs del pentàgon [equilàter i equiangle] inscrit [en el cercle ○$ABCDE$]. [EIV 11]

Per construcció, els arcs $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$, $\overset{\frown}{DE}$ i $\overset{\frown}{EA}$ són iguals.

Considerem els segments GH, HK, KL, LM i MG tangents a la circumferència del cercle pels punts A, B, C, D i E.[783] [EIII 18] ♣

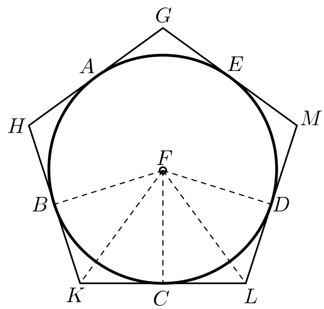


FIGURA EIV 12

[*Demostració.*] *a*) Considerem el centre F del cercle ○$ABCDE$ [EIII 1]
i unim FB, FK, FC, FL i FD. [P 1]

Atès que el segment KL és tangent [a la circumferència del cercle] ○$ABCDE$ per [el punt] C
i FC és el radi que acaba al punt C,
resulta que el segment FC és perpendicular al [segment] KL. [EIII 18]

Així, cada un dels angles a [el punt] C és recte. [DI 10]

Per les mateixes [raons], els angles a [els punts] B i D també.

Ara, atès que l'angle $\widehat{FCK}$ és recte,
el [quadrat] de [costat] FK equival a la [suma dels quadrats] de [costats] FC i CK. [EI 47]

Per les mateixes [raons], el [quadrat] de [costat] FK equival a la [suma dels quadrats] de [costats] FB i BK. [EI 47]

En conseqüència, la [suma dels quadrats] de [costats] FC i CK equival a la [suma dels quadrats] de [costats] FB i BK.

Però el [quadrat] de [costat] FC és igual al [quadrat] de [costat] FB.
[DI 15, Nc 1 i Nc 2]

D'això en resulta que el romanent —el [quadrat] de [costat] CK— és igual al romanent —el [quadrat de costat] BK. [Nc 3]

Aleshores, BK i CK [són] iguals;[784]
FB i FC són iguals [, ja que són radis,] [DI 15]
i [el costat] FK [és] comú.

Per tant, els dos (segments) BF i FK són iguals als dos (segments) CF i FK, i les bases BK i CK també.

Per tant, els angles $\widehat{BFK}$ i $\widehat{KFC}$ són iguals, [EI 8]
i [els angles] $\widehat{BKF}$ i $\widehat{FKC}$ també. [EI 8]

783. Els segments consecutius es tallen en un punt [P 5].
784. Vegeu la nota 496 (pàgina 148).

Així doncs, els angles $\widehat{BFC}$ i $\widehat{BKC}$ [valen] el doble que [els angles] $\widehat{KFC}$ i $\widehat{FKC}$, respectivament. [Nc 2]

Per les mateixes [raons], (l'angle) $\widehat{CFD}$ val el doble que (l'angle) $\widehat{CFL}$ [Nc 2]
i (l'angle) $\widehat{DLC}$ el doble que (l'angle) $\widehat{FLC}$. [Nc 2]

Atès que els arcs $\overset{\frown}{BC}$ i $\overset{\frown}{CD}$ són iguals,
els angles $\widehat{BFC}$ i $\widehat{CFD}$ també ho són. [EIII 27]

Però [els angles] $\widehat{BFC}$ i $\widehat{DFC}$ valen el doble que [els angles] $\widehat{KFC}$ i $\widehat{LFC}$, respectivament. [P 4 i Nc 5′]

Així doncs, [els angles] $\widehat{KFC}$ i $\widehat{FCK}$ són també iguals a [els angles] $\widehat{LFC}$ i $\widehat{FCL}$, respectivament.

D'això en resulta que els [triangles] $\triangle\, FKC$ i $\triangle\, FLC$ són dos triangles amb dos angles iguals a dos angles
i un costat igual a un costat, [en concret] el [costat] FC comú.

Per tant, també tindran iguals els altres costats corresponents i l'altre angle. [EI 26]

En conseqüència, els segments KC i CL [són] iguals
i els angles $\widehat{FKC}$ i $\widehat{FLC}$ també.

I, atès que [els segments] KC i CL són iguals,
[el segment] KL [val] el doble [que el costat] KC. [Nc 2]

Per les mateixes [raons], podem establir que [el segment] HK [val] el doble que [el segment] BK,
[els segments] BK i KC són iguals,
i els segments HK i KL també.

De forma semblant, establim que cadascun dels segments HG, GM i ML [és igual] a HK i KL.

En definitiva, el pentàgon ⬠ $GHKLM$ és equilàter. ♠

Afirmo que també és equiangle.

b) Els angles $\widehat{FKC}$ i $\widehat{FLC}$ són iguals.

I hem vist que els angles $\widehat{HKL}$ i $\widehat{KLM}$ [valen] el doble que els angles $\widehat{FKC}$ i $\widehat{FLC}$, respectivament.

D'això en resulta, aleshores, que [els angles] $\widehat{HKL}$ i $\widehat{KLM}$ són iguals. [Nc 5′]

Anàlogament, podem veure que cadascun dels angles $\widehat{KHG}$, $\widehat{HGM}$ i $\widehat{GML}$ [és] igual a cadascun [dels angles] $\widehat{HKL}$ i $\widehat{KLM}$. [Nc 5′]

Per tant, els cinc angles $\widehat{GHK}, \widehat{HKL}, \widehat{KLM}$, $\widehat{LMG}$ i $\widehat{MGH}$ són iguals entre si. [Nc 1]

En conseqüència, el pentàgon ⬠ $GHKLM$ és equiangle i equilàter.

♠

I, a més, circumscriu el cercle ○$ABCDE$.

I això és el que volíem demostrar. ♠

EIV 13. *Volem inscriure un cercle en un pentàgon regular donat.*

Sigui ⬠ $ABCDE$ un pentàgon regular donat.

Volem inscriure-hi un cercle.

[*Construcció i demostració.*] Tirem les bisectrius CF i DF als angles $\widehat{BCD}$ i $\widehat{CDE}$ [, respectivament]. [EI 9]

Del punt F, en què es tallen [, necessàriament, els segments] CF i DF, [P 5]

tirem els segments FB, FA i FE. [P 1]

Atès que [el segment] BC és igual al [segment] CD

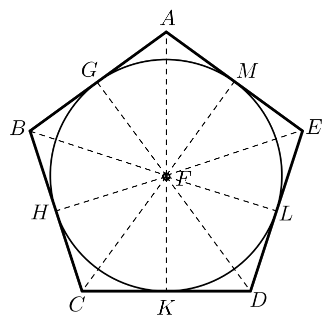


FIGURA EIV 13

i CF [és un segment] comú,

resulta que els dos (segments) BC i CF són iguals als dos (segments) DC i CF,

i l'angle $\widehat{BCF}$ [és] igual a l'angle $\widehat{DCF}$.

Per tant, les bases BF i DF són iguals i els triangles △ BCF i △ DCF també.

I, en conseqüència, els altres angles [corresponents] també ho són. [EI 4]

Per tant, l'angle $\widehat{CBF}$ [és] igual a (l'angle) $\widehat{CDF}$. [Nc 2]

I, atès que (l'angle) $\widehat{CDE}$ és el doble de (l'angle) $\widehat{CDF}$ i

[els angles] $\widehat{CDE}$ i $\widehat{ABC}$ [són] iguals i [els angles] $\widehat{CDF}$ i $\widehat{CBF}$ també,

[resulta que] l'angle $\widehat{CBA}$ també és el doble de (l'angle) $\widehat{CBF}$. [Nc 1 i 5′]

En conseqüència, els angles $\widehat{ABF}$ i $\widehat{FBC}$ són iguals.

I, per tant, BF és la bisectriu de l'angle $\widehat{ABC}$.

Anàlogament, els segments FA i FE són les bisectrius respectives dels angles $\widehat{BAE}$ i $\widehat{AED}$.

En conseqüència, els segments FG, FH, FK, FL i FM tirats des del punt F són perpendiculars als segments AB, BC, CD, DE i EA [, respectivament]. [EI 12]

Ara, atès que els angles $\widehat{HCF}$ i $\widehat{KCF}$ són iguals
i l'angle recte $\widehat{FHC}$ és igual a [l'angle recte] $\widehat{FKC}$, [P 4]
resulta que els dos triangles $\triangle\, FHC$ i $\triangle\, FKC$ tenen dos angles iguals a dos angles,
un costat igual a un costat, el [costat] comú FC, que subtendeix un dels angles iguals,
i els altres costats [corresponents] també iguals. [EI 26]

Així doncs, el [segment] perpendicular FH [és] igual a [el segment] perpendicular FK.[785] ♣

I, d'una manera anàloga, podem veure que [els segments] FL, FM i FG són iguals a cada un [dels segments] FH i FK.

D'això en resulta que els cinc segments FG, FH, FK, FL i FM són iguals entre si. [Nc 1]

En conseqüència, el cercle amb centre a F i radi un dels [segments amb l'altre extrem a] G, H, K, L o M[786] passarà pels altres punts.

I serà tangent als segments AB, BC, CD, DE i EA pel fet que els angles als punts G, H, K, L i M són rectes,
ja que si un d'aquests segments, a més de tocar la circumferència del cercle, tallés el cercle, tindríem un segment perpendicular al diàmetre del cercle, en un dels extrems, que entraria al cercle,
cosa que, com hem vist abans, és absurda.[787] [EIII 16, porisma]

D'això en resulta que el cercle de centre F i radi un dels (segments) FG, FH, FK, FL o FM no talla els segments AB, BC, CD, DE o EA.

En definitiva, [el cercle] és tangent a tots [aquests segments], com mostra la figura del [pentàgon] ⬠ $GHKLM$.

I això és el que volíem demostrar. ♠

785. Podem tirar la circumferència de centre F i radi FH o FK [P 3].
786. Vegeu la nota 775 (pàgina 252).
787. Demostració per l'absurd.

EIV 14. *Volem circumscriure un cercle a un pentàgon regular donat.*
Sigui ⬠ $ABCDE$ el pentàgon regular donat.

Volem circumscriure-hi un cercle.

[*Construcció.*] Dimidiem els angles $\widehat{BCD}$ i $\widehat{CDE}$ amb els (segments) CF i DF, respectivament. [EI 9]

Unim FB, FA i FE, i F és el punt en el qual es tallen les bisectrius CF i DF. [P 5][788] ♣

Ara, d'una manera anàloga a la de [la proposició] precedent,
podem veure que els angles $\widehat{CBA}$, $\widehat{BAE}$ i $\widehat{AED}$
també són dimidiats pels segments FB, FA i FE, respectivament.

I, atès que els angles $\widehat{BCD}$ i $\widehat{CDE}$ són iguals,
que (l'angle) $\widehat{FCD}$ és la meitat de (l'angle) $\widehat{BCD}$ i
que (l'angle) $\widehat{CDF}$ és la meitat de (l'angle) $\widehat{CDE}$,
resulta que [els angles] $\widehat{FCD}$ i $\widehat{FDC}$ són iguals. [Nc 6′]

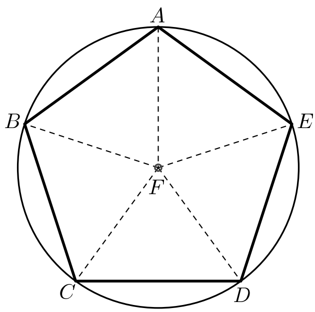


FIGURA EIV 14

Per tant, el costat FC és igual al costat FD. [EI 6]

Anàlogament, podem veure que [els segments] FB, FA i FE també són iguals a cadascun dels (segments) FC i FD.

D'això en resulta, per tant, que els cinc segments FA, FB, FC, FD i FE són iguals entre si. [Nc 1]

Així doncs, el cercle amb centre F i radi un dels (segments) FA, FB, FC, FD o FE passarà també pels altres punts.

En definitiva, hem circumscrit [el pentàgon regular donat].

I això és el que volíem demostrar. ♠

EIV 15. *Volem inscriure un hexàgon regular en un cercle donat.*
Sigui ○$ABCDEF$ el cercle donat.

Volem inscriure-hi un hexàgon regular, equilàter i equiangle.

788. El punt F és el centre de la circumferència que circumscriu el pentàgon, i FA, per exemple, un radi.

[*Construcció.*] Tirem el diàmetre AD del cercle $\bigcirc ABCDEF$[789] i en determinem el centre G. [EIII 1]

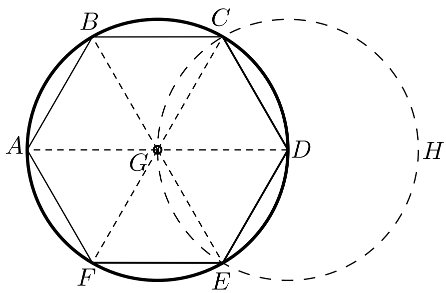


FIGURA EIV 15

Ara, considerem el cercle $\bigcirc EGCH$, amb centre D i radi DG. [P 3]

Unim EG i CG [els punts C i E en què es tallen totes dues circumferències[790] amb el centre G], [P 1]

i prolonguem [els radis obtinguts] a l'interior [del cercle] fins als punts B i F [de la circumferència, respectivament]. [P 2]

Considerem [els segments] AB, BC, CD, DE, EF i FA. [P 1] ♣

Afirmo que l'hexàgon ⬡$ABCDEF$ és regular.

[*Demostració.*] *a*) El punt G és el centre del cercle $\bigcirc ABCDEF$.

Per tant, [els segments] GE i GD són iguals.

Novament, atès que el punt D és el centre del cercle $\bigcirc GCH$, DE és igual a DG [ja que tots dos són radis]. [DI 15]

Però hem establert que [els segments] GE i GD són iguals.

En conseqüència, GE i ED també ho són. [Nc 1]

I això fa que el triangle $\triangle EGD$ sigui equilàter.

En conseqüència, els tres angles $\widehat{EGD}, \widehat{GDE}$ i $\widehat{DEG}$ són iguals entre si, ja que els angles de la base dels triangles isòsceles també ho són.

[EI 5]

A més, els tres angles del triangle [junts] valen dos angles rectes.

[EI 32]

Per tant, l'angle $\widehat{EGD}$ és igual a una tercera part de dos angles rectes.

789. Ja ho hem vist a EIV 6. En primer lloc, cerquem el centre del cercle [EIII 1] i després tirem un segment que passi pel centre prolongant-lo pels dos extrems fins a tallar la circumferència. Vegeu la nota 769 (pàgina 248).

790. Vegeu la nota 387 (pàgina 113).

Anàlogament, podem veure que l'angle $\widehat{DGC}$ és una tercera part de dos angles rectes.

I, atès que el segment CG, que incideix sobre [el segment] EB, determina els angles adjacents $\widehat{EGC}$ i $\widehat{CGB}$, que [junts] fan dos angles rectes, [EI 13]
resulta que l'altre angle, $\widehat{CGB}$, també és igual a una tercera part de dos angles rectes. [Nc 3]

En definitiva, els angles $\widehat{EGD}$, $\widehat{DGC}$ i $\widehat{CGB}$ són iguals entre si. [P 4]

Per tant, els [angles] que se'ls oposen [pel vèrtex], $\widehat{BGA}$, $\widehat{AGF}$ i $\widehat{FGE}$, són iguals [a $\widehat{EGD}$, $\widehat{DGC}$ i $\widehat{CGB}$, respectivament]. [EI 15]

D'això en resulta que els sis angles $\widehat{EGD}$, $\widehat{DGC}$, $\widehat{CGB}$, $\widehat{BGA}$, $\widehat{AGF}$ i $\widehat{FGE}$ són iguals entre si.

A més, sabem que angles iguals determinen arcs de circumferència iguals. [EIII 26]

Aleshores, els sis arcs de circumferència $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$, $\overset{\frown}{DE}$, $\overset{\frown}{EF}$ i $\overset{\frown}{FA}$ són iguals entre si. [Nc 1]

I arcs de circumferència iguals subtendeixen cordes iguals. [EIII 29]

En definitiva, els sis segments [AB, BC, CD, DE, EF i FA] són iguals entre si. [Nc 1]

Per tant, l'hexàgon $\hexagon ABCDEF$ és equilàter. ♠

Afirmo, a més, que [l'hexàgon] també és equiangle.

b) Atès que els arcs de circumferència $\overset{\frown}{FA}$ i $\overset{\frown}{ED}$ són iguals,
si afegim l'arc de circumferència $A\overset{\frown}{BC}D$ [a tots dos],
l'arc total $FA\overset{\frown}{BC}D$ és igual a l'arc total $ED\overset{\frown}{CB}A$ [Nc 2]
i els angles $\widehat{FED}$ i $\widehat{AFE}$ subtendeixen els arcs de circumferència $FA\overset{\frown}{BC}D$ i $ED\overset{\frown}{CB}A$, respectivament.

Així doncs, l'angle $\widehat{AFE}$ és igual a (l'angle) $\widehat{DEF}$. [EIII 27]

Anàlogament, podem establir que cadascun dels altres angles de l'hexàgon $\hexagon ABCDEF$ és igual a un dels angles $\widehat{AFE}$ i $\widehat{FED}$.

D'això en resulta que l'hexàgon $\hexagon ABCDEF$ és equiangle. ♠

I, com que hem vist que també és equilàter,
hem inscrit un hexàgon regular en el cercle $\bigcirc ABCDE$.
I això és el que volíem demostrar. ♠

EIV 15, porisma. *Tot això posa de manifest que un costat de l'hexàgon [regular] és igual al radi del cercle.*[791] *I, d'una manera anàloga [al que passa] al pentàgon, si tirem tangents a la circumferència del cercle pels punts mitjans dels [sis] arcs de circumferència, tindrem un hexàgon regular circumscrit al cercle, [i ho establirem] de la mateixa manera que en el cas del pentàgon regular. Per tant, com en el cas del pentàgon, podem inscriure un hexàgon regular en un cercle donat i circumscriure-n'hi un altre.*

I això és el que volíem demostrar. ♠

EIV 16. *Volem inscriure un pentadecàgon regular en un cercle donat.*

Sigui $\bigcirc ABCD$ un cercle donat.

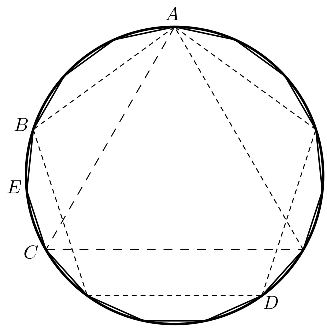


FIGURA EIV 16

Volem inscriure-hi un pentadecàgon regular.

[*Construcció*.] Considerem el costat AC d'un triangle equilàter inscrit en [el cercle $\bigcirc ABCD$] [EIV 2]

i el costat AB d'un pentàgon regular inscrit en el mateix cercle. [EIV 11]

Aleshores, si suposem que la circumferència $\bigcirc ABCD$ està dividida en quinze parts iguals,[792]

l'arc [de circumferència] $\overset{\frown}{ABC}$, que és una tercera part del cercle, consta de cinc [peces o parts],

i l'arc [de circumferència] $\overset{\frown}{AB}$, que n'és una cinquena part, en consta de tres. [Nc 2]

D'això en resulta que l'arc [diferència] $\overset{\frown}{BC}$ consta exactament de dues [peces] iguals. [Nc 3]

Dimidiem l'arc [de circumferència] $\overset{\frown}{BC}$ pel punt E. [EIII 30]

791. Curiosament, Euclides no usa aquest fet per a construir l'hexàgon regular.

792. Fixem-nos en un fet sorprenent dels *Elements*: Euclides usa l'anàlisi matemàtica per a poder copsar què cal fer. Malgrat que usa κύκλος, pensa en περιφέρεια.

D'això en resulta que cadascun dels arcs [de circumferència] $\overset{\frown}{BE}$ i $\overset{\frown}{EC}$ és una quinzena part de la circumferència del cercle $\circ ABCDE$. ♣

[*Demostració.*] Unim BE i EC. [P 1]

De manera continuada, inserim segments iguals [a cadascun d'aquests] en el cercle $\circ ABCD[E]$. [Eɪᴠ 1]

Obtenim un pentadecàgon regular inscrit en el cercle [donat]. [Eɪɪɪ 28]

I això és el que volíem demostrar. ♠

[Porisma.] I, d'una manera anàloga al pentàgon, *si tirem tangents a la circumferència del cercle pels punts mitjans de cada un dels quinze arcs divisió* [*de la circumferència*] *del cercle, haurem circumscrit un pentadecàgon regular al cercle.*

I, a més, amb unes demostracions anàlogues a les del pentàgon, *també podem inscriure i circumscriure* [*en un cercle o al voltant seu, respectivament,*] *un pentadecàgon regular.*

I això és el que volíem demostrar. ♠

A.2 La teoria general de la proporció i les aplicacions a la geometria: llibres ᴠ i ᴠɪ

Comentaris als llibres ᴠ i ᴠɪ. I arribem a un altre nucli dur dels *Elements* d'Euclides. El contingut, però, és essencialment d'Èudox, deixeble i col·laborador de Plató. En el llibre ᴠ, un cop acceptada l'existència de «magnituds incommensurables», un fet que s'estableix al llibre x, s'introdueix la «teoria de la proporció» per a magnituds. I, per a fer-ho, es necessiten uns conceptes nous de «raó» i de «proporció» que generalitzin els de la teoria de la proporció numèrica.

Un cop assolit aquest objectiu, Euclides aplica la teoria de la proporció a la geometria plana i obté els resultats més bàsics de la teoria de la proporció geomètrica, en particular, el teorema de Tales per als costats i les àrees de triangles semblants.

A.2.1 Llibre cinquè: Ev

Comentaris. Aquest llibre absolutament teòric, amb més o p. 48 menys encert, estableix els conceptes de «raó», «igualtat» i «desigualtat» de raons, i les propietats que lliguen la igualtat de raons amb les operacions de suma i resta de magnituds (de la mateixa) classe, i amb l'alternança dels termes. També hi apareix la «raó doble».

Consta de divuit definicions, alguna de les quals, com ja hem comentat abans, és deficient completament,[793] i conté vint-i-cinc proposicions: mitja dotzena fan referència a la igualtat de certs equimúltiples i la resta al comportament de les raons i de les proporcions.

A.2.1*a* Les definicions d'Ev (Ὅροι) p. 48

Dv 1. Una magnitud (μέγεθος) és una *part* (μέρος) d'una [altra] magnitud, la petita de la gran, quan [la petita] mesura (τὰ καταμετροῦντα) la gran.[794]

Dv 2. I la [magnitud] gran [és] *múltiple* (πολλαπλάσιον) de la petita quan és mesurada per la petita.[795]

---

793. Vegeu § «Llibre v. La teoria general de la proporció d'Èudox» (pàgines 48 i següents) i Pla (2016*c*), § 4.2.5, «Èudox de Cnidos» (p. 313–323).

794. Diu: ὅταν καταμετρῇ τὸ μεῖζον.

795. Si $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ són dues magnituds, amb $\mathfrak{A} > \mathfrak{B}$, aleshores $\mathfrak{A} := \{\mathfrak{B}, \overset{m)}{\ldots}, \mathfrak{B}\}$, amb $m \in \mathbb{N} - \{1\}$, atesa la noció comuna Nc 5 —que abreujarem $\mathfrak{A} := m\,\mathfrak{B}$—, significa que $\mathfrak{B}$ és una «part» de $\mathfrak{A}$, i $\mathfrak{A}$ és un «múltiple» de $\mathfrak{B}$ format per m parts que són congruents amb la magnitud $\mathfrak{B}$. Conscientment, hem evitat escriure $\mathfrak{A} := \mathfrak{B} + \overset{m)}{\cdots} + \mathfrak{B}$ per tal de no fer servir un component algèbric que el text d'Euclides no conté, malgrat que les primeres proposicions del llibre proporcionen la «compatibilitat» de la multiplicitat amb l'adjunció i la sostracció de magnituds, i amb les raons. Això no obstant, emprar la notació més algèbrica pot resultar útil al lector per a una comprensió millor del text.

Dv 3. Una *raó* (λόγος) entre dues magnituds de la mateixa classe (ὁμογενῶν) és una mena de relació respecte de la mida (πηλικότης)[796] de dues magnituds de la mateixa classe.[797]

Dv 4. Dues magnituds [de la mateixa classe] *tenen una raó entre si* quan un cert múltiple de l'una supera l'altra.[798]

Dv 5. Diem que [quatre] magnituds *tenen la mateixa raó*, la primera amb la segona, i la tercera amb la quarta, quan, per a qualssevol equimúltiples[799] de la primera i la tercera i [qualssevol] equimúltiples[800] de la segona i la quarta, s'esdevé que el múltiple de la primera és més

---

796. Diu: σχέσις κατὰ πηλεικότϑτα.

797. Si $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ són dues magnituds, designarem la raó amb $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$, si bé també es pot representar amb $\mathfrak{A} : \mathfrak{B}$.

Val la pena fer-ne tres comentaris: 1. Aquesta definició és falsa, atesa l'ambigüitat de l'expressió «una mena de relació respecte de la mida». 2. Malgrat que Euclides no defineix el concepte de «magnitud», hem d'entendre, com ja hem dit (pàgina 48), que la seva idea està en sintonia amb la que dóna Aristòtil a Aristòtil (2000), llibre v 13, 1020 a 10 i 12, edició castellana, p. 238: «Una magnitud és una quantitat mesurable.» Això planteja una situació que ratlla la paradoxa, ja que la magnitud substitueix el nombre —que és reductible a la unitat, és a dir, mesurable— però pot ser incommensurable —no reductible a la unitat, és a dir, no mesurable. 3. Euclides introdueix l'expressió «de la mateixa classe», que, com ja hem dit (pàgina 48), Arquimedes evita, tenint en compte que parla només de «línies», «superfícies» i «sòlids».

798. Formalment, donades dues magnituds $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$, diem que existeix $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$ si, i només si, existeix un $m \in \mathbb{N}$ per al qual $m\,\mathfrak{A} > \mathfrak{B}$ o $m\,\mathfrak{B} > \mathfrak{A}$.

Aquesta definició —de la qual és indispensable fer un comentari— i la següent són fruit del geni d'Èudox.

Si, tal com fa Euclides, s'entén com una definició —com qualsevol altra—, automàticament s'ha d'acceptar que hi ha magnituds de la mateixa classe que tenen una raó i d'altres que no en tenen. Suposar que dues magnituds de la mateixa classe *sempre* tenen una raó és un postulat. I això és el que Euclides suposa a l'enunciat i a la demostració d'Ev 8, ja que estableix raons entre dues magnituds donades i una tercera *arbitrària*.

Arquimedes ho postula a *Sobre l'esfera i el cilindre*, postulat v. Vegeu Arquimedes (2010), edició catalana, p. 69.

799. Per a la dificultat de la comprensió de l'expressió euclidiana «*qualssevol* equimúltiples», καϑ᾽ ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν, vegeu la nota 7 de Vera (1970), volum i, p. 787–788.

800. Iguals als anteriors o diferents dels anteriors.

gran, igual o inferior que el de la segona, segons que[801] el múltiple de la tercera sigui més gran, igual o inferior que el de la quarta, respectivament.[802]

Dv 6. Diem que [quatre] magnituds són *proporcionals* (ἀνάλογον) quan tenen la mateixa raó.[803]

Dv 7. [Amb les presumpcions de Dv 5,] si existeix un múltiple de la primera [magnitud] que excedeix el múltiple de la segona però el múltiple de la tercera [magnitud] no excedeix el múltiple de la quarta, aleshores diem que la raó de la primera [magnitud] amb la segona és *més gran* que la raó de la tercera [magnitud] amb la quarta.[804]

Dv 8. Una proporció —ἀναλογία— *té, almenys* —ἐλάχιστος—, *tres* termes.[805]

---

801. O bé «implica» per la simetria dels termes.

802. Donades quatre magnituds $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{G}$ i $\mathfrak{D}$, dues a dues de la mateixa classe, diem que $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ tenen la mateixa raó que $\mathfrak{G}$ i $\mathfrak{D}$ si, i només si, per a tot $m, n \in \mathbb{N}, m\,\mathfrak{A} \lesseqgtr n\,\mathfrak{B}$ implica $m\,\mathfrak{G} \lesseqgtr n\,\mathfrak{D}$. Per a una justificació d'aquesta definició, vegeu Pla (2016*c*), § 4.2.5, «Èudox de Cnidos», p. 313 i següents.

Val la pena consultar Ex 2, 3 i 4 per a adonar-se que la triple possibilitat de la definició Dv 5 solament es dóna quan hi ha commensurabilitat. I, si això passa, tractar amb magnituds es redueix a tractar amb nombres naturals, i la teoria de la proporció esdevé numèrica i cau dins l'àmbit dels llibres VII, VIII i IX.

803. De fet, és una manera d'expressar ἀνάλογον, «en proporció». Formalment, si $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{G}$ i $\mathfrak{D}$ són proporcionals, s'escriu $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}}$.

Fixem-nos que, tal com estableixen les definicions Dv 5 i 6, només cal que les magnituds siguin de la mateixa classe dues a dues; no cal que ho siguin les quatre. Això permet que raons de longituds siguin iguals a raons de nombres o a raons d'àrees, etc.

804. En termes actuals, si $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{G}$ i $\mathfrak{D}$ són quatre magnituds (dues a dues de la mateixa classe), $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} > \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}}$ quan existeixen dos enters positius $m, n \in \mathbb{N}$ per als quals $m\,\mathfrak{A} > n\,\mathfrak{B}$ però, en canvi, $m\,\mathfrak{G} < n\,\mathfrak{D}$.

805. Fa referència a les proporcions contínues: $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{G}}$, que són les que tenen menys termes. Usa Ὅροι amb el sentit de 'terme' (vegeu la nota 53, pàgina 14). Per tal de distingir una proporció contínua d'una de normal, Euclides no usa els termes συνεχής i διῃρημένη, que són els d'Aristòtil (1995), v 6 i 7, edició catalana, p. 23–27.

Dv 9. Quan tres magnituds són proporcionals, diem que la primera té amb la tercera una *raó doble* (διπλασίονα λόγον) de la que té amb la segona.[806]

Dv 10. Quan quatre magnituds són proporcionals [contínuament], la primera té amb la quarta la raó triple (τριπλασίονα λόγον) de la que té amb la segona.[807]

Dv 11. S'anomenen [magnituds] *corresponents* (ὁμόλογος) els antecedents entre si i els consegüents entre si.

Dv 12. *Alternar una raó*[808] (ἐναλλὰξ λόγος) és prendre la raó dels antecedents i la dels consegüents [, fer un canvi de termes mitjans].[809]

Dv 13. *Invertir una raó* (ἀνάπαλιν λόγος) és considerar la raó de cada consegüent amb l'antecedent corresponent.[810]

Dv 14. La *composició d'una raó* (σύνθεσις λόγος) s'obté en considerar la raó que té com a antecedent la suma dels dos termes, antecedent i consegüent, i el mateix consegüent.[811]

---

806. Es tracta de la raó doble —de la qual parlarem a § «Raó composta», de *Grècia III*. De fet, si tenim $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}}$, aleshores $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}} := \left(\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}\right)^2$.

807. Breument, si $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}} = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}}$, aleshores $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{D}} := \left(\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}\right)^3$.

808. De fet, s'alternen els termes mitjans de dues raons o d'una proporció.

809. La forma «alternada» —o «permutada»— necessita una parella de raons; en definitiva, la forma alternada de $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}, \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}}$ és $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}}, \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{D}}$. A Ev 16 es veu que si les dues primeres raons són iguals, les dues darreres també. És a dir, $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}}$ implica $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}} = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{D}}$. Observem, però, que la proposició pot incomplir la condició: «[les magnituds] són, dues a dues, de la mateixa classe».

810. La forma «invertida» de $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$ és $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}$. A Ev 7 afirma que si $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}}$, aleshores $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}} = \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{C}}$. Òbviament, aquesta proposició és una conseqüència immediata de la definició de proporció quan s'intercanvia «primer» per «segon» i «tercer» per «quart».

811. La forma «composta» de la raó $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$ és la raó $\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}}$. A Ev 18 es veu que si dues raons són iguals, les compostes respectives també ho són. És a dir, si $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}}$, aleshores $\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{C}+\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}}$. La «composta» d'una raó no s'ha de confondre amb la composta de dues o tres raons. Vegeu § «Raó composta», de *Grècia III*.

Dv 15. La *separació d'una raó* (διαίρεσις λόγος) s'obté en considerar la raó que té com a antecedent l'excés de l'antecedent sobre el consegüent, i el mateix consegüent.[812]

Dv 16. La *conversió d'una raó* (ἀναστροφὴ λόγος) s'obté en considerar la raó que té com a consegüent l'excés de l'antecedent sobre el consegüent, i el mateix antecedent.[813]

Dv 17. Considerem dues col·leccions de magnituds amb el mateix nombre de termes que, preses de dues en dues [les magnituds de] cada una, tenen la mateixa raó. La raó dels extrems de les dues col·leccions s'anomena *raó per igualtat* (δί ἴσου λόγος)[814] [o *raó compactada*].[815] També se sol expressar amb: «Considerem els extrems amb exclusió dels termes mitjans.»[816]

Dv 18. Donades dues col·leccions de tres magnituds cadascuna, si la raó de l'antecedent al consegüent de la primera col·lecció és igual a la raó d'un antecedent a un consegüent de la segona, però la raó d'un consegüent a un altre terme de la primera col·lecció és igual a la raó d'un altre terme a un antecedent de la segona, aleshores la proporció s'anomena *proporció pertorbada* (τεταραγμένη δὲ ἀναλογία).[817]

---

812. La forma «separada» d'una raó $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$, amb $\mathfrak{A} > \mathfrak{B}$, és la raó $\frac{\mathfrak{A}-\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}}$. A Ev 17 es veu que si dues raons són iguals, les separades respectives també. És a dir, si $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}}$, aleshores $\frac{\mathfrak{A}-\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{C}-\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}}$.

813. La forma «convertida» d'una raó $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$ és la raó $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}-\mathfrak{B}}$. Ev 19 estableix el resultat anàleg al de la conversió, però, com dèiem en el cas de la inversió, la igualtat és una conseqüència immediata de la definició. Ara cal completar-ho, però, amb Dv 17 i usant «afegir» en lloc de «sostreure».

814. Considera dues col·leccions de magnituds $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_{k-1}, \mathfrak{A}_k$; $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_{k-1}, \mathfrak{B}_k$ que satisfan $\frac{\mathfrak{A}_i}{\mathfrak{A}_{i+1}} = \frac{\mathfrak{B}_i}{\mathfrak{B}_{i+1}}$, amb $i = 1, \ldots, k-1$. Aleshores, diu que $\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_k} = \frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{B}_k}$, cosa que no estableix, però, fins a les proposicions Ev 22 i 23. Pel que fa a l'expressió δί ἴσου, vegeu Plató (1989), 617 b 5, edició catalana, p. 132–133.

815. I també «la raó composta» de les raons en proporció contínua $\frac{\mathfrak{A}_i}{\mathfrak{A}_{i+1}} = \frac{\mathfrak{B}_i}{\mathfrak{B}_{i+1}}$, amb $i = 1, \ldots, k-1$, sense confondre-la amb la «composta d'una raó» de la definició Dv 14.

816. Diu: Λῆψις τῶν ἄκρων καθ' ὑπεξαίρεσιν τῶν μέρων.

817. L'enunciat és un pèl complex. Siguin $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3)$ i $(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3)$ dues col·leccions de tres magnituds. Tenim que $\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_2} = \frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{B}_3}$ i $\frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}_3} = \frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{B}_2}$. Aleshores, la proporció «pertorbada» és la proporció $\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_3} = \frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{B}_3}$.

p. 49 A.2.1*b* Les proposicions d'Ev

[*La teoria general de la proporció d'Èudox*][818]

Ev 1. *Si un nombre arbitrari de magnituds són equimúltiples*[819] *d'una mateixa quantitat de magnituds, cadascuna amb cadascuna, respectivament, aleshores totes* [*juntes*] *seran el mateix múltiple de totes* [*juntes*] *tantes vegades com una* [*de les primeres*] *magnituds és múltiple d'una* [*de les segones*].[820]

Considerem un nombre arbitrari de magnituds, AB, CD, equimúltiples de les magnituds E, F, respectivament.[821]

Afirmo que tantes vegades com [la magnitud] AB és [múltiple] de [la magnitud] E,

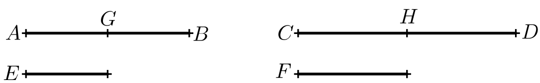


Figura Ev 1

[les magnituds] AB i CD [juntes] ho són de [les magnituds] E i F [juntes].

[*Demostració.*] Atès que [les magnituds] AB i CD són equimúltiples de [les magnituds] E i F,

---

818. És aconsellable fer una lectura algèbrica o simbòlica tant dels enunciats com de les demostracions. Podem trobar-ne a Kayas (1978), volum i, p. 83–103; i Mueller (1981), edició del 2006, p. 118–134. Aquest darrer text analitza també la dificultat que presenta la interpretació d'aquest llibre. Vegeu Mueller (1981), edició del 2006, p. 134–151.

819. Les magnituds $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ són «equimúltiples» quan són mesurades per (magnituds) més petites, $\mathfrak{A}'$ i $\mathfrak{B}'$, el mateix nombre de vegades, és a dir, $\mathfrak{A} := m\,\mathfrak{A}'$ i $\mathfrak{B} = m\,\mathfrak{B}'$, amb $n \in \mathbb{N}$. Vegeu Dv 2 i la nota 820.

820. El redactat és fosc. En termes actuals diu: «Si les magnituds $m\,\mathfrak{A}, m\,\mathfrak{B}, \dots, m\,\mathfrak{N}$ són equimúltiples de $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \dots, \mathfrak{N}$, aleshores $\{m\,\mathfrak{A}, m\,\mathfrak{B}, \dots, m\,\mathfrak{N}\} = m\,\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \cdots, \mathfrak{N}\}$», que és la propietat «distributiva» dels enters positius respecte de la unió de magnituds.

821. Fixem-nos en el tractament diferenciat que fa Euclides de les magnituds. Unes les expressa com si fossin segments i n'especifica els extrems perquè es tracta de l'addició de dues o més. I unes altres les designa amb una sola lletra perquè són donades per endavant.

Aquesta figura —i totes les altres d'aquest llibre— és ideal, perquè el text no tracta de segments sinó de magnituds arbitràries, que nosaltres anomenem $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{G}$, etc., però que no tenen representació gràfica.

[la magnitud] AB conté tantes magnituds iguals a [la magnitud] E com [la magnitud] CD en té d'iguals a [la magnitud] F.

Podem, doncs, dividir la magnitud AB en magnituds AG, GB iguals a [la magnitud] E,
i CD en [magnituds] CH, HD iguals a [la magnitud] F. [Dv 2]

Ara bé, el nombre de [parts] AG, GB serà igual al nombre de [parts] CH, HD.

I, com que [les magnituds] AG i CH són iguals a [les magnituds] E i F, respectivament,
[les magnituds] AG i AG, CH [juntes] són iguals a E i a E, F [juntes], respectivament. [Nc 2].

Per les mateixes raons, [les magnituds] GB i GB, HD [juntes] són iguals a [les magnituds] E i E, F [juntes], respectivament.

Aleshores, [la magnitud] AB conté tantes [magnituds] iguals a E com [les magnituds] AB, CD [juntes] contenen E, F [juntes].[822]

En conseqüència, [la magnitud] AB és múltiple de [la magnitud] E tantes vegades com [les magnituds] AB, CD [juntes] ho són de [les magnituds] E, F [juntes].
I això és el que volíem demostrar.[823] ♠

Ev 2. *Si una primera [magnitud] i una tercera són equimúltiples d'una segona i una quarta [, respectivament,] i una cinquena [magnitud] i una sisena també ho són de la segona i la quarta [, respectivament,] aleshores la primera i la cinquena [magnituds, juntes,]*[824] *i la tercera i la sisena [, juntes,] també són equimúltiples de la segona i la quarta [magnituds, respectivament].*[825]

---

822. Fixem-nos que usa la commutativitat de l'addició de magnituds. És a dir, si tenim, per exemple, $\big\{\{\mathfrak{A}, \mathfrak{A} \overset{n)}{\ldots}, \mathfrak{A}\}, \{\mathfrak{B}, \mathfrak{B}, \overset{n)}{\ldots}, \mathfrak{B}\}\big\}$, tenim $\big\{\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}, \{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}, \overset{n)}{\ldots}, \{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}\big\}$. Vitrac (1994), p. 127–134, fa una reflexió sobre les pressuposicions d'aquest llibre euclidià, però no diu res ni de l'associativitat ni de la commutativitat perquè tracta de parts però no de sumands.

823. D'ara endavant, en les demostracions ometrem la paraula «magnitud» perquè tots els objectes que es tracten en aquest llibre ho són.

824. Per a conèixer les maneres diferents que usa Euclides per a referir-se a l'addició de magnituds, vegeu Vitrac (1994), p. 70, nota 2.

825. Si $\mathfrak{A}_1 = m\,\mathfrak{A}_2$ i $\mathfrak{A}_3 = m\,\mathfrak{A}_4$ i $\mathfrak{A}_5 = n\,\mathfrak{A}_2$ i $\mathfrak{A}_6 = n\,\mathfrak{A}_4$, aleshores

Siguin AB i DE la primera [magnitud] i la tercera equimúltiples de la segona C i la quarta F [, respectivament].

I siguin BG i EH la cinquena i la sisena equimúltiples de la segona C i la quarta F [, respectivament].

Afirmo que la primera magnitud i la cinquena juntes [, o sigui,] AG, i la tercera i la sisena [juntes, o sigui,] DH, són també equimúltiples de la segona C i la quarta F [, respectivament].

[*Demostració.*]

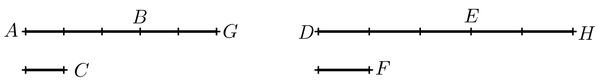


FIGURA EV 2

Atès que AB i DE són equimúltiples de C i F [, respectivament,] a AB hi ha tantes magnituds iguals a C com magnituds iguals a F hi ha a DE.

Per les mateixes raons, BG conté tantes magnituds iguals a C com EH en conté d'iguals a F.

Aleshores, AG en conté tantes d'iguals a C com DH d'iguals a F.

Per tant, DH serà tantes vegades divisible per F com ho és AG per C.

Aleshores, la primera magnitud i la cinquena juntes [, o sigui,] AG, i la tercera i la sisena [juntes, o sigui,] DH,
són també equimúltiples de la segona i la quarta, C i F [, respectivament].

Així doncs, si la primera [magnitud] i la tercera són equimúltiples de la segona i la quarta [, respectivament,]
i la cinquena i la sisena [magnituds] ho són de la segona i la quarta [, respectivament,]
la primera i la cinquena juntes, i la tercera i la sisena [juntes] són també equimúltiples de la segona i la quarta [juntes, respectivament].
I això és el que volíem demostrar. ♠[826]

$\{\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_5\} := (m+n)\,\mathfrak{A}_2$ i $\{\mathfrak{A}_3, \mathfrak{A}_6\} := (m+n)\,\mathfrak{A}_4$. En síntesi, si $\mathfrak{A}$ és una magnitud arbitrària, $(m+n)\,\mathfrak{A} := \{m\,\mathfrak{A}, n\,\mathfrak{A}\} := m\,\mathfrak{A} + n\,\mathfrak{A}$. A partir d'ara usarem l'escriptura additiva perquè ja ha quedat ben clar què significa.

826. Els porismes d'aquest llibre varien segons els autors: uns n'estableixen un per a Ev 7 i 19, que són els que recollim nosaltres; i d'altres, un per a Ev 2, 4, 13, 19, i dos per a Ev 24. Vegeu el problema 47 (pàgina 66).

Ev 3. *Si una primera [magnitud] i una tercera són equimúltiples d'una segona i una quarta [, respectivament], i prenem equimúltiples de la primera i la tercera, aleshores, per igualtat,*[827] *les [magnituds] que hem pres també són equimúltiples de la segona i la quarta, respectivament.*[828]

Suposem que la primera [magnitud], A, i la tercera, C, són equimúltiples de la segona, B, i la quarta, D, respectivament,
i prenem EF i GH, equimúltiples de A i C, respectivament.

Afirmo que EF i GH són equimúltiples de B i D [, respectivament].

[*Demostració.*] Atès que EF i GH són equimúltiples de A i C [, respectivament,]
EF conté tantes magnituds iguals a A com magnituds iguals a C conté GH.

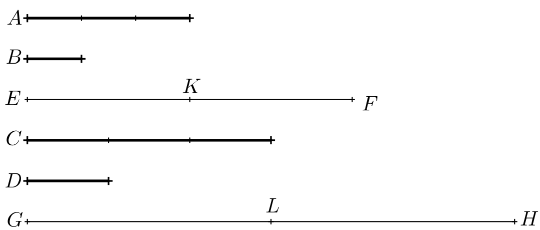


Figura Ev 3

Dividim EF en magnituds EK, KF iguals a A,
i GH en [magnituds] GL, LH iguals a C.

El nombre de [magnituds] EK, KF [de EF] és el mateix que el de [magnituds] GL, LH [de GH].

I, com que A i C són equimúltiples de B i D [, respectivament,]

827. Per a una anàlisi de l'expressió δι᾽ ἴσον (*ex æquali*), vegeu Heath (1925), volum ii, edició del 1956, p. 141. Vitrac (1994), p. 74, sosté que la demostració es basa en «la possibilitat de substituir coses iguals en les relacions d'equimultiplicitat», cosa que cal postular. Tot depèn, però, del fet que considerem l'equimultiplicitat en termes d'igualtat, o no. Si entenem que $\mathfrak{A}_1$ és múltiple de $\mathfrak{A}$ i significa que $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A} + \overset{m)}{\cdots} + \mathfrak{A}$, aleshores Nc 1 i Nc 2 justifiquen la substitució d'iguals. Si, en canvi, no admetem aquesta possibilitat, cosa que sembla una mica difícil, atesa la definició de «múltiple» de Dv 2, aleshores cal imposar la possibilitat que esmenta Vitrac.

828. «Equimúltiples d'equimúltiples són equimúltiples.» En símbols: si $\mathfrak{A}_1 = m\,\mathfrak{A}_2$ i $\mathfrak{A}_3 = m\,\mathfrak{A}_4$, i considerem $n\,\mathfrak{A}_1$ i $n\,\mathfrak{A}_3$, aleshores tenim que $n\,\mathfrak{A}_1 = p\,\mathfrak{A}_2$ i $n\,\mathfrak{A}_3 = p\,\mathfrak{A}_4$, on, a més, $p = m \times n$. Més sintètic encara: $n\,(m\,\mathfrak{A}) = (n \times m)\,\mathfrak{A}$.

i EK [és] igual a A, i GL a C,
resulta que EK i GL són equimúltiples de B i D [, respectivament].

Per les mateixes [raons], KF i LH són equimúltiples de B i D [, respectivament].

En conseqüència, com que la primera [magnitud] EK i la tercera GL són equimúltiples de la segona B i la quarta D, respectivament, i [la magnitud] cinquena KF i la sisena LH ho són també de la segona B i la quarta D [, respectivament],
resulta que la primera [magnitud] i la cinquena juntes [, és a dir,] EF, i la tercera i la sisena [juntes, és a dir,] GH,
són equimúltiples de la segona i la quarta, B i D [, respectivament].
[Ev 2]

I això és el que volíem demostrar. ♠

Ev 4. *Si una primera [magnitud] té amb una segona la mateixa raó que una tercera [té] amb una quarta, aleshores equimúltiples de la primera i la tercera tindran la mateixa raó que equimúltiples de la segona i la quarta, sempre que els prenguem en l'ordre convenient.*[829]

La primera [magnitud] A té la mateixa raó amb la segona B que la tercera C [té] amb la quarta D.

Prenem equimúltiples arbitraris E i F de A i C [, respectivament,] i equimúltiples arbitraris G i H de B i D [, respectivament].

Afirmo que E [és] a G com F [és] a H.

[*Demostració.*] Siguin K i L equimúltiples arbitraris de E i F [, respectivament,] i M i N equimúltiples arbitraris de G i H [, respectivament].

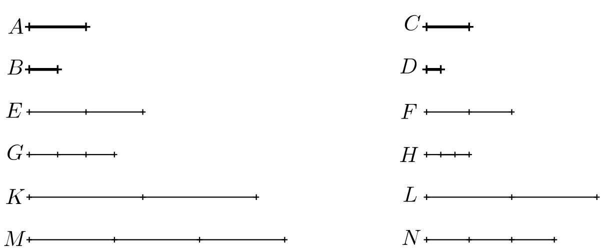


Figura Ev 4

829. En símbols: si $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}}$, aleshores $\frac{m\,\mathfrak{A}}{n\,\mathfrak{B}} = \frac{m\,\mathfrak{C}}{n\,\mathfrak{D}}$, amb $m, n \in \mathbb{N}$, arbitraris. És un porisma immediat de la definició Dv 5.

Atès que E i F són equimúltiples de A i C [, respectivament,]
i K i L ho són de E i F [, respectivament,]
K i L ho són de A i C [, respectivament]. [Ev 3]

Per les mateixes [raons], M i N són equimúltiples [respectius] de B i D. [Ev 3]

I, com que A és a B com C [és] a D,
i els equimúltiples [arbitraris respectius] K i L ho són de A i C [, respectivament,]
i els equimúltiples [arbitraris respectius] M i N [ho són] de B i D,
resulta que si K és més gran [, igual o més petit] que M,
aleshores L també és més gran [, igual o més petit] que N. [Dv 5]

Però K i L són equimúltiples [respectius] de E i F,
i M i N equimúltiples arbitraris [respectius] de G i H.[830]

En definitiva, E [és] a G com F [és] a H. [Dv 5]
I això és el que volíem demostrar. ♠[831]

Ev 5. *Si una magnitud i la part que se'n sostreu són equimúltiples d'una magnitud i del que se'n sostreu, el residu serà equimúltiple del residu, [és a dir, els residus] són el mateix múltiple que les totalitats.*[832]

Suposem que la magnitud AB conté CD tantes vegades com la [part] sostreta AE conté la [part] sostreta CF.

Afirmo que el residu EB conté el residu FD tantes vegades com la magnitud total AB conté la total CD.

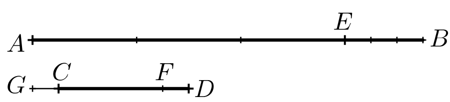


Figura Ev 5

[*Demostració.*] La [magnitud] AE és [divisible] per CF tantes vegades com EB ho és per CG.[833]

830. Entre els equimúltiples arbitraris de K i L hi ha els que són múltiples del nombre necessari per a obtenir les magnituds E i F com a múltiples de A i C, respectivament. Vegeu Heath (1925), volum II, p. 143.

831. Seguint la indicació de la nota 818 (pàgina 270), vegeu el problema 45 (pàgina 66). Alguns autors ofereixen un porisma d'aquesta proposició.

832. Si $\mathfrak{A} = m\,\mathfrak{C}$ i $\mathfrak{B} = m\,\mathfrak{D}$, aleshores $\mathfrak{A} - \mathfrak{B} = m\,(\mathfrak{C} - \mathfrak{D})$.

833. Val la pena esmentar la nota de Heath (1925), edició del 1956, volum II, p. 146: «τοσαυταπλάσιον γεγονέτω καὶ τὸ EB τοῦ CG ("EB és

I, com que AE i EB són equimúltiples de CF i GC [, respectivament,]
AE i AB ho són de CF i GF [, respectivament]. [Ev 1]

Però hem suposat que AE i AB són equimúltiples de CF i CD [, respectivament].

Aleshores, AB és equimúltiple de GF i CD alhora.

Per tant, GF [és] igual a CD.[834]

Sostraiem CF de tots dos.

En resulta que el residu GC és igual al residu FD. [Nc 3]

I, com que AE i EB són equimúltiples de CF i GC [, respectivament,]
i GC [és] igual a DF,
resulta que AE i EB són equimúltiples de CF i FD [, respectivament].

Però hem suposat que AE i AB són equimúltiples de CF i CD [, respectivament].

Aleshores, EB i AB són equimúltiples de FD i CD [, respectivament].

Per tant, el residu EB és també equimúltiple del residu FD
com la [magnitud] total AB ho [és] de la [magnitud] total CD.
I això és el que volíem demostrar. ♠

Ev 6. *Si dues magnituds són equimúltiples d'unes altres dues i prenem algunes [parts de les primeres] equimúltiples de les segones, aleshores els residus o bé són iguals a la segona [magnitud] o bé en [són] equimúltiples [, respectivament].*[835]

---

aquest múltiple de CG").» Això pot fer pensar que CG està donat i EB s'ha pres igual a un cert múltiple, però, de fet, la magnitud donada és EB i la que s'ha determinat és CG, o sigui, hem construït CG de manera que sigui un «*sub*múltiple de EB». I, seguidament, Euclides explica detingudament la demostració i el caràcter *hipotètic* de les construccions. De fet, suposa l'existència d'una magnitud $\mathfrak{X}$ que $m\,\mathfrak{A} - m\,\mathfrak{B} = m\,\mathfrak{X}$. Afegeix $m\,\mathfrak{B}$ a cada membre i, tenint en compte Ev 1, obté $m\,\mathfrak{A} = m\,(\mathfrak{X} + \mathfrak{B})$. Per tant, o bé $\mathfrak{A} = \mathfrak{X} + \mathfrak{B}$ o bé $\mathfrak{X} = \mathfrak{A} - \mathfrak{B}$, que porta a $m\,\mathfrak{A} - m\,\mathfrak{B} = m\,(\mathfrak{A} - \mathfrak{B})$.

834. Si $\mathfrak{A}$ és equimúltiple de $\mathfrak{A}_1$ i $\mathfrak{A}_2$ —és a dir, $m\,\mathfrak{A}_1 = m\,\mathfrak{A}_2$—, aleshores $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2$.

835. Donats dos equimúltiples $m\,\mathfrak{A}$ i $m\,\mathfrak{B}$, $n\,\mathfrak{A}$ i $n\,\mathfrak{B}$, de $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$, amb $m > n$, $m\,\mathfrak{A} - n\,\mathfrak{A}$ i $m\,\mathfrak{B} - n\,\mathfrak{B}$ són l'equimúltiple $m - n$ de $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$, respec-

Siguin AB i CD dues magnituds equimúltiples de dues magnituds E i F [, respectivament].

En prenem [les parts] AG i CH equimúltiples de E i F [, respectivament].

Afirmo que els residus GB i HD són iguals a E i F o en són equimúltiples.

[*Demostració.*][836] *a*) Afirmo que si GB és igual a E, aleshores HD és igual a F.

En efecte, si fem CK igual a F,
atès que AG i CH són equimúltiples de E i F [, respectivament,] GB [és] igual a E i KC a F.

Aleshores, AB i KH ho són de E i F. [Ev 2]

Però hem suposat que AB i CD ho són de E i F [, respectivament].

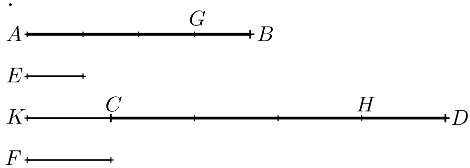


Figura Ev 6

Per tant, KH i CD també ho són de F.

En conseqüència, [les dues magnituds] KH i CD són equimúltiples de F.

Aleshores, KH és igual a CD.

Suposem ara que sostraiem CH de totes dues.

El residu KC és igual al residu HD. [Nc 3]

Però F és igual a KC.

En conseqüència, HD també és igual a F. [Nc 1]

Així doncs, si GB és igual a E, HD és igual a F. ♠

b) De manera anàloga, podem veure que si GB és un cert múltiple de E, HD també és el mateix múltiple de F. ♠

I això és el que volíem demostrar. ♠

Ev 7. [*Magnituds*] *iguals tenen la mateixa raó amb una mateixa* [*magnitud*], *i aquesta* [*té la mateixa raó*] *amb* [*magnituds*] *iguals.*[837]

tivament. En notació moderna, ras i curt: $m\mathfrak{A} - n\mathfrak{A} = (m-n)\mathfrak{A}$.

836. Heus ací una demostració per casos que retrobem a Ev 9: $GB = E$ o $GB \neq E$.

837. Simbòlicament: si $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ i $\mathfrak{C}$ és arbitrària, aleshores $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}} = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}}$ i $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}} = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}}$.

Siguin A i B dues magnituds iguals i C una d'arbitrària.[838]

Afirmo que A i B tenen la mateixa raó amb C i [que] C [té la mateixa raó] amb A i B.

[*Demostració.*] a) Prenem D i E, equimúltiples de A i B [, respectivament,] i un múltiple arbitrari F de C.

Aleshores, atès que D i E són equimúltiples de A i B [, respectivament,] i A [és] igual a B,
resulta que D també [és] igual a E. [Nc 2, iterada]

Sigui F [un múltiple] arbitrari [de C].[839]

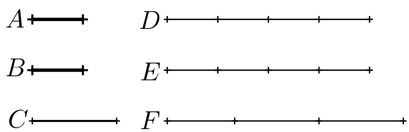


FIGURA EV 7

Aleshores, si D és més gran, igual o més petit que F,
E també és més gran, igual o més petit que F [, respectivament].

Però, atès que D i E són equimúltiples respectius de A i B,
i F és un múltiple arbitrari de C,
A [manté amb] C [la mateixa raó que] B [amb] C. [Dv 5] ♠

Afirmo que C[840] també té la mateixa raó amb cada una de [les magnituds] A i B,
b) ja que, de manera similar i amb la mateixa construcció, podem veure que D és igual a E, i F [té] algun altre [valor].

Aleshores, si F és més gran, igual o més petit que D,
també és més gran, igual o més petit que E [, respectivament].[841]

I F és un múltiple de C, i D i E equimúltiples arbitraris de A i B.

Aleshores, C [és] a A com C [és] a B. [Dv 5] ♠

I això és el que volíem demostrar. ♠

Ev 7, porisma. D'això en resulta, òbviament, que *si certes magnituds són proporcionals, aleshores també són* invertendo.

I això és el que volíem demostrar.[842] [Dv 13] ♠

838. Diu: «ἄλλο δέ τι, ὅ ἔτυχεν».

839. Aquesta arbitrarietat és necessària per a poder recórrer a la definició Dv 5.

840. El text grec diu «E», un error evident d'escriptura.

841. Pel principi de substitució, nota 410 (pàgina 119).

842. Vegeu la nota 810 (pàgina 268).

Ev 8. a) *En magnituds diferents respecte d'una mateixa [magnitud], la gran té una raó més gran que la petita.* b) *I una mateixa [magnitud] té una raó més gran amb la [magnitud] petita que no amb la gran.*[843]

Siguin AB i C dues magnituds diferents, i AB la més gran de les dues.

Considerem una magnitud arbitrària D.

Afirmo que la raó de AB amb D és més gran que la de C amb D,
i [que] D té una raó superior amb C que no pas amb AB.

[*Demostració.*][844] Atès que AB és més gran que C, sigui BE [una magnitud] igual a C. [Ei 2 o Ei 3][845]

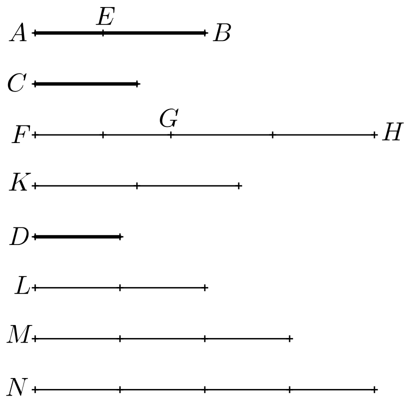


Figura Ev 8*a*

Adjuntem la més petita de les magnituds AE i EB a si mateixa un nombre convenient de vegades fins a aconseguir una magnitud que supera D. [Dv 4][846]

a) Suposem que AE és més petita que EB.

Aleshores, si l'adjuntem a si mateixa un cert nombre de vegades, finalment obtenim una [magnitud] FG més gran que D. [Dv 4][847]

Siguin GH i K divisibles per EB i C [, respectivament,]
el mateix nombre de vegades que FG ho és per AE.

Considerem els múltiples doble, L, triple, M,
i tants com calgui, [cadascun creixent] una unitat D,
fins a aconseguir el primer [múltiple] de D que sobrepassi K.

843. En símbols: si $\mathfrak{A} > \mathfrak{B}$ i $\mathfrak{C}$ és arbitrària, aleshores $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}} > \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}}$ i $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}} > \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}}$.

844. La demostració procedeix per casos.

845. De fet, Euclides accepta la validesa d'Ei 2 o Ei 3 per a magnituds, cosa que no ha establert.

846. Aquesta frase és redundant i pot ser suprimida.

847. Euclides suposa que una magnitud arbitrària D —encara que ho sigui— té una raó amb les magnituds AB i C. D'ací el caràcter de postulat de l'esmentada definició.

Prenem també el quart múltiple de D, N, que és el primer de D que supera K.

Atès que K és inferior a N [i és] el primer, K no és més petit que M.

I, com que FG i GH són equimúltiples de AE i EB [, respectivament,]
resulta que FG i FH són equimúltiples de AE i AB [, respectivament]. [Ev 1]

I FG i K ho són de AE i C [, respectivament].

Per tant, FH i K són equimúltiples de AB i C [, respectivament].

De bell nou, com que GH i K són equimúltiples de EB i C
i EB [és] igual a C, [Nc 1]
GH també [és] igual a K [Nc 1]
i K no és inferior a M.

Aleshores, GH no és inferior a M.

Però FG [és] més gran que D.

Per tant, FH és més gran que D i M [juntes].[848]

Però les magnituds D i M [juntes] són iguals a [la magnitud] N, ja que M és tres vegades D, M i D [juntes] valen quatre vegades D; i N també és quatre vegades D.

Aleshores, M i D [juntes] són iguals a N.

Però FH és més gran que M i D [juntes].

En conseqüència, FH excedeix N;
i, en canvi, K no l'excedeix;[849]
i FH i K són equimúltiples de AB i C, i N un múltiple arbitrari de D.

Així doncs, la raó de AB a D és més gran que la de C a D. [Dv 7] ♠

Afirmo que la raó de D a C és més gran que la de D a AB.

En efecte, d'una manera similar i amb la mateixa construcció, podem veure que N excedeix K; que N, en canvi, no excedeix FH; que N és un múltiple de D;

848. Diu: συναμφοτέρων τῶν Δ,M μεῖζόν ἐστιν. S'accepta que les magnituds satisfan les propietats de la desigualtat: transitivitat i compatibilitat amb la suma i amb el producte.

849. Utilitza que $K \leq N$ per a aquesta primera aplicació de Dv 7; però, per construcció, $K < N$.

i que FH i K són equimúltiples arbitraris de AB i C [, respectivament].

Així doncs, D té amb C una raó més gran que la que D [té] amb AB.[850] [Dv 7] ♠

b) Suposem, en canvi, que AE és més gran que EB.

Aleshores, un múltiple adequat de la [magnitud] petita, EB, és més gran que D. [Dv 4]

Suposem que el múltiple resultant GH de EB [és] més gran que D.

Considerem FG i K múltiples respectius de AE i C tantes vegades com GH ho és de EB.

Aleshores, de manera anàloga [a l'anterior], veiem que FH i K són equimúltiples de AB i C [, respectivament].

I també de manera anàloga [a l'anterior], sigui N el primer múltiple de D més gran que FG.

Aleshores, de bell nou, FG no és més petit que M però GH [és] més gran que D.

I d'això en resulta que el total FH excedeix D i M [juntes], que és N, però K no excedeix N, atès que FG, que [és] més gran que GH —o sigui, més gran que K—, tampoc excedeix N.[851]

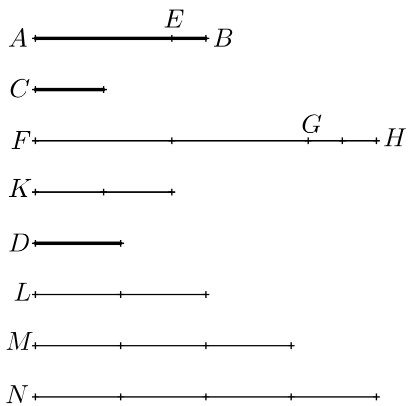


FIGURA EV 8*b*

I, si ara seguim els raonaments anteriors, podem completar la demostració. ♠

I això és el que volíem demostrar. ♠

850. La complexitat de la demostració està lligada a la manca d'un simbolisme algèbric adequat. Vegeu l'ítem *c* del problema 45 (pàgina 66).

851. Com indica HEATH (1921), volum II, p. 152, n'hi ha prou d'agafar com a magnitud N, el primer múltiple de D que supera GH, atès que $FG > D, FG + GH = FH > N$.

Ev 9. a) *Magnituds que tenen la mateixa raó amb una [magnitud] són iguals entre si.* b) *I aquelles [magnituds] respecte de les quals una [magnitud] té la mateixa raó són iguals.*[852]

[*Demostració.*] *a*) Suposem que [les magnituds] A i B tenen la mateixa raó amb [la magnitud] C.

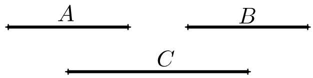


Figura Ev 9

Afirmo que A és igual a B.

Si no és així,[853] A i B no poden tenir la mateixa raó amb C. [Ev 8]

Però [suposem que] la tenen; per tant, A és igual a B. ♠

b) Suposem que C té la mateixa raó amb A i B.

Afirmo que A és igual a B.

Si no és així,[854] C no pot tenir la mateixa raó amb cadascuna [de les magnituds] A i B. [Ev 8]

Per tant, A és igual a B. ♠

I això és el que volíem demostrar. ♠

Ev 10. a) *Per a [magnituds] que tenen raons amb una [magnitud], és més gran aquella [magnitud] que té la raó més gran.* b) *I [, si considerem] les raons d'una magnitud amb dues altres [magnituds], la raó més gran correspon a la magnitud més petita.*[855]

a) Suposem que [la magnitud] A té amb [la magnitud] C una raó més gran que la que té [la magnitud] B amb C.

Afirmo que [la magnitud] A és més gran que [la magnitud] B.

---

852. Simbòlicament: si $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}} = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}}$, o bé si $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}} = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}}$, aleshores $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$. Es tracta, doncs, de la proposició recíproca d'Ev 7.

853. Hipòtesi de l'absurd.

854. Hipòtesi de l'absurd.

855. En símbols: si $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ són dues magnituds i $\mathfrak{C}$ és (una magnitud) arbitrària, aleshores $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}} > \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}}$ implica $\mathfrak{A} > \mathfrak{B}$, i $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}} > \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}}$ implica $\mathfrak{A} > \mathfrak{B}$. Es tracta, doncs, de la proposició recíproca d'Ev 8.

Aquestes proposicions garanteixen la unicitat de la tercera i la quarta proporcional de dues o tres magnituds donades. Una altra qüestió és la possible existència d'aquestes magnituds proporcionals. Euclides, a Evi 11 i 12, en demostra l'existència quan les magnituds són segments; però, en les proposicions Exii 2 i 18, per exemple, suposa que també existeixen quan les magnituds són superfícies o sòlids, tot i que no ho demostra enlloc.

[*Demostració.*] Si no és així,[856]
A és igual o més petita que B, certament.[857]

Però, de fet, A no pot ser igual a B,
ja que si ho és, A i B tenen la mateixa raó amb C, [Ev 7]
i no és així.

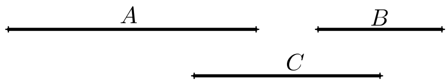


Figura Ev 10

Per tant, A és diferent de B.

Però A tampoc pot ser més petita que B,
perquè si ho és, la raó de A amb C és més petita que la de B amb C, [Ev 8]
i no és així.

D'això en resulta que A ni és més petita que B ni, com hem vist, igual a B.

En definitiva, A és més gran que B. ♠

b) Considerem ara el cas en el qual [la magnitud] C
té una raó més gran amb B que amb A.

Afirmo que B és més petita que A.

[*Demostració.*] Si no és així,[858] és igual o més gran, necessàriament.

Però sabem que B no és igual a A,
perquè si ho fos, C tindria amb A i B la mateixa raó, [Ev 7]
i no és així.

Per tant, A no és igual a B.

Però B tampoc no és més gran que A,
ja que si ho fos, la raó de C amb B seria menor que amb A, [Ev 8]
i no és així.

En conseqüència, B no és més gran que A
i, alhora, com hem vist, tampoc és igual a A.

D'això en resulta que B és més petita que A. ♠

I això és el que volíem demostrar. ♠

856. Hipòtesi de l'absurd.

857. La demostració procedeix per casos. Euclides suposa que les magnituds compleixen la llei de tricotomia, és a dir, si $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$, aleshores $\mathfrak{A} \lesseqgtr \mathfrak{B}$.

858. Hipòtesi de l'absurd.

Ev 11. *Les raons [de magnituds] que són iguals a una mateixa raó [entre magnituds] són iguals entre si.*[859]

O sigui, si A és a B com C és a D, i C és a D com E és a F [, on A, B, C, D, E i F són magnituds], aleshores A és a B com E és a F.

[*Demostració.*] Prenem G, H, K equimúltiples de A, C, E [, respectivament,]
i L, M, N equimúltiples arbitraris de B, D, F [, respectivament].

Com que A és a B com C [és] a D,
i hem pres els equimúltiples respectius, G i H de A i C, i
els equimúltiples arbitraris respectius, L i M de B i D,

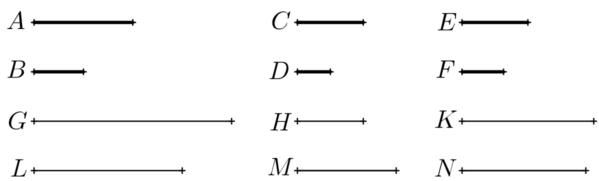


Figura Ev 11

resulta que si G és més gran, igual o més petit que L, aleshores H també és més gran, igual o més petit que M. [Dv 5]

Anàlogament, com que C és a D com E [és] a F,
i hem pres els equimúltiples respectius H i K de C i E, i
els equimúltiples arbitraris respectius M i N de D i F,
si H és més gran, igual o més petit que M,
K també és més gran, igual o més petit que N. [Dv 5]

Però [hem vist que] si H és més gran, igual o més petit que M,
G també és més gran, igual o més petit que L [, respectivament].

Per tant, si G és més gran, igual o més petit que L,
K és més gran, igual o més petit que N.

Però G i K són equimúltiples respectius de A i E,
i L i N equimúltiples arbitraris respectius de B i F.

En conseqüència, A és a B com E [és] a F. [Dv 5]

I això és el que volíem demostrar. ♠

859. En símbols: si $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}}$ i $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}} = \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{F}}$, aleshores $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{F}}$. Aquesta proposició és la rèplica de la Nc 1 a les raons entre magnituds.

Euclides no la fa servir fins a Ev 12 i això en justifica la inclusió.

Ev 12. *Si hi ha un cert nombre de magnituds [que són] proporcionals, aleshores una [de les magnituds] antecedents és a la consegüent que hi correspon com totes les antecedents [juntes] són a totes les consegüents [juntes].*[860]

Siguin A, B, C [, etc.,] i D, E, F [, etc.,] un cert nombre de magnituds proporcionals,
és a dir, A [és] a B com C [és] a D i E a F [, etc.].

Afirmo que A és a B com A, C, E [, etc., juntes,] són a B, D, F [, etc., juntes].

[*Demostració.*] Siguin G, H, K equimúltiples respectius de A, C, E,[861] i L, M, N equimúltiples arbitraris respectius de B, D, F.

Com que A és a B com C [és] a D, i E a F, i G, H, K són els equimúltiples respectius de A, C, E, i L, M, N els equimúltiples arbitraris respectius de B, D, F,

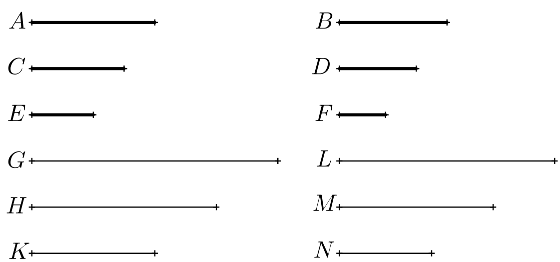


Figura Ev 12

si G és més gran, igual o més petit que L,
H, K també són més grans, iguals o més petits que M, N [, respectivament]. [Dv 5]

Per tant, si G és més gran, igual o més petit que L,
aleshores G, H, K són més grans, iguals o més petits que L, M, N. [Nc 2][862]

Ara bé, G i G, H, K [juntes] són equimúltiples respectius de A i A, C, E [juntes],

860. Diu: «Si tenim una sèrie de raons iguals, la suma dels antecedents és a la suma dels consegüents com un antecedent és al seu consegüent.» En símbols: si $\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{B}_1} = \frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{B}_2} = \cdots = \frac{\mathfrak{A}_k}{\mathfrak{B}_k}$, aleshores $\frac{\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \cdots + \mathfrak{A}_k}{\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2 + \cdots + \mathfrak{B}_k} = \frac{\mathfrak{A}_i}{\mathfrak{B}_i}$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Trobem aquest teorema a Aristòtil (1995), v 7, 1131 b 4, edició catalana, volum ii, p. 26.

861. Podríem afegir-hi «etcètera».

862. Vegeu Vitrac (1994), p. 94, nota 56.

ja que si un nombre arbitrari de magnituds [són] equimúltiples d'un nombre igual d'altres magnituds,
aleshores la totalitat [de les primeres magnituds] també [és divisible] per totes [les segones], respectivament,
tantes vegades com una de les [primeres] magnituds és [divisible] per una [de les segones]. [Ev 1]

Per les mateixes [raons], L i L, M, N [juntes] són també equimúltiples respectius de B i B, D, F [juntes]. [Dv 5]

I, atès que A és igual a B, A, C, E [juntes] també [ho són] a B, D, F [juntes].

I això és el que volíem demostrar. ♠

Ev 13. *Si la primera [magnitud] té amb la segona la mateixa raó que la tercera [té] amb la quarta, i la tercera [magnitud] té amb la quarta una raó més gran que la que té la cinquena amb la sisena, aleshores la primera [magnitud] també té amb la segona una raó més gran que la que [té] la cinquena amb la sisena.*[863]

La primera [magnitud], A, té amb la segona, B, la mateixa raó que la tercera [magnitud], C, [té] amb la quarta, D.

I la tercera [magnitud], C, té amb la quarta, D, una raó més gran que la cinquena, E, [té] amb la sisena, F.

Afirmo que la primera [magnitud], A, també té amb la segona, B, una raó més gran que la cinquena, E, [té] amb la sisena, F.

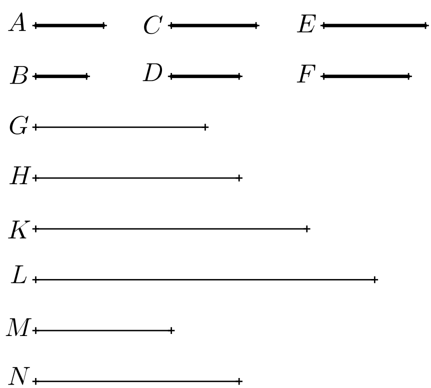


Figura Ev 13

[*Demostració*]. Hi ha equimúltiples de C i E,
i equimúltiples arbitraris de D i F,

863. En símbols: si $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}}$ i $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}} > \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{F}}$, aleshores $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} > \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{F}}$. En el cas de la desigualtat és el «principi de substitució» per a raons. Vegeu la nota 410 (pàgina 119). Òbviament, suposem que aquest enunciat val també per a magnituds, és a dir, si $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ i $\mathfrak{A} > \mathfrak{C}$, aleshores $\mathfrak{B} > \mathfrak{C}$.

de manera que el múltiple de C excedeix el [múltiple] de D,
però, en canvi, el múltiple de E no excedeix el múltiple de F. [Dv 7]

Considerem que G i H són els equimúltiples respectius de C i E,
i K i L els equimúltiples arbitraris respectius de D i F,
[l'existència dels quals ha quedat establerta],
de manera que G excedeixi K però H no excedeixi L.

Ara, siguin M i N múltiples respectius de A i B,
de manera que M ho sigui de A tantes vegades com G ho és de C,
i N de B tantes vegades com K ho és de D.

Ara bé, com que A és a B com C [és] a D,
i M i G són equimúltiples respectius de A i C, i
N i K equimúltiples arbitraris de B i D,
si M és més gran, igual o més petit que N,
G és més gran, igual o més petit que K. [Dv 5]

Però G és més gran que K.

Per tant, M també és més gran que N, però H no és més gran que L;
M i H són equimúltiples de A i E, respectivament,
i N i L són equimúltiples arbitraris de B i F, respectivament.

D'això en resulta que A té amb B una raó més gran que la que té E amb F. [Dv 7]

I això és el que volíem demostrar. ♠

Ev 14. *Si una primera [magnitud] té la mateixa raó amb una segona que la que té una tercera amb una quarta, i la primera [magnitud] és més gran, igual o més petita que la tercera, aleshores la segona serà també més gran, igual o més petita que la quarta, respectivament.*[864]

Suposem que la primera [magnitud], A, té amb la segona, B,
la mateixa raó que la tercera, C, [té] amb la quarta, D,
i [la magnitud] A és més gran que [la magnitud] C.

Afirmo que B també és més gran que D [, respectivament].

864. En símbols: si $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}}$ i $\mathfrak{A} \gtreqless \mathfrak{C}$, aleshores $\mathfrak{B} \gtreqless \mathfrak{D}$. A la *Meteorologia*, Aristòtil explicita la proposició equivalent: «Si $\mathfrak{A} > \mathfrak{B}$, aleshores $\mathfrak{C} > \mathfrak{D}$.» Aristòtil (1996), llibre III, § 5, 376 a 11-14, edició castellana del 1996, p. 377.

[*Demostració.*] Atès que A és més gran que C i B [és] una [magnitud] arbitrària,

A té amb B una raó més gran que la que té C amb B. [Ev 8]

Però A [és] a B com C [és] a D.

Per tant, C també té amb D una raó més gran que la que [té] amb B. [Ev 13]

FIGURA EV 14

Ara bé, sabem que quan una [magnitud] té la mateixa raó amb dues, la raó més gran correspon a la més petita d'aquestes magnituds. [Ev 10]

En conseqüència, D [és] més petita que B.

D'això en resulta que B és més gran que D.

De manera anàloga, podem provar que quan A i C són iguals, B i D també ho són. [Ev 7, 9 i 11]

I, a més, si A és més petita que C, B també ho és més que D. [Ev 8, 10 i 13]

I això és el que volíem demostrar. ♠

Ev 15. *Les parts tenen la mateixa raó que els equimúltiples corresponents sempre que els prenguem en l'ordre convenient.*[865]

Considerem que AB i DE són equimúltiples respectius de C i F.

Afirmo que C és a F com AB [és] a DE.

[*Demostració.*] Atès que AB i DE són equimúltiples respectius de C i F,

DE té tantes magnituds iguals a F com AB a C.

Suposem que hem dividit AB en [les magnituds] AG, GH i HB iguals a C, i DE en [les magnituds] DK, KL i LE iguals a F.

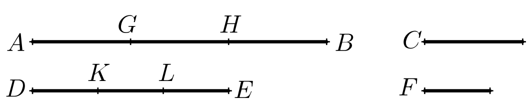


FIGURA EV 15

Per tant, el nombre de [magnituds] AG, GH i HB és igual al nombre de [magnituds] DK, KL i LE.

865. En símbols: si $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \frac{m\,\mathfrak{A}}{m\,\mathfrak{B}}$.

I, atès que AG, GH i HB són iguals entre si, i DK, KL i LE també, resulta que AG és a DK com GH [és] a KL, i HB a LE. [Ev 7]

I, aleshores, [per a magnituds proporcionals,] una [magnitud de les primeres] és a una [de les segones] com la suma de totes [les primeres magnituds és] a la suma de totes [les segones]. [Ev 12].

Per tant, AG és a DK com AB [és] a DE.

Però AG és igual a C i DK a F.

En conseqüència, C és a F com AB [és] a DE.

I això és el que volíem demostrar. ♠

Ev 16. *Quan alternem quatre magnituds que són proporcionals, continuen sent-ho.*[866]

Suposem que A, B i C, D són quatre magnituds proporcionals, en concret, A [és] a B com C [és] a D.

Afirmo que també són [proporcionals] quan les alternem, [és a dir,] A [és] a C com B [és] a D.

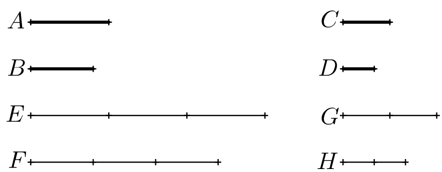


Figura Ev 16

[*Demostració.*] Considerem E i F equimúltiples respectius de A i B, i G i H equimúltiples arbitraris respectius de C i D.

Com que E i F són equimúltiples respectius de A i B, i les parts tenen la mateixa raó que els múltiples semblants [respectius], [Ev 15]

resulta que A és a B com E [és] a F.

Però A [és] a B com C [és] a D.

866. En símbols: si $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}}$, aleshores $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}} = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{D}}$. Aquí cal fer una observació. Hem suposat que, en una raó, la magnitud de l'antecedent i la del consegüent són de la mateixa classe; en canvi, en una proporció, cada parella és de la mateixa classe, atès que formen raó, però la classe d'una parella pot ser diferent de la classe de l'altra. Ara, quan les alternem, ens podem trobar amb raons en les quals l'antecedent i el consegüent siguin de classes diferents. Vegeu la nota 801 (pàgina 267). Aristòtil usa tàcitament aquesta proposició a la *Meteorologia*, llibre III, 5, 376 a 22-24, edició castellana del 1996, p. 377.

I, aleshores, C [és] a D com E [és] a F. [Ev 11]

Novament, com que G i H són equimúltiples respectius de C i D, C és a D com G [és] a H. [Ev 15]

Però C [és] a D com E [és] a F.

Aleshores, E [és] a F com G [és] a H. [Ev 11]

I, si quatre magnituds són proporcionals,
i la primera és més gran, igual o més petita que la tercera,
aleshores la segona serà també més gran, igual o més petita que la quarta. [Ev 14]

Si E és més gran, igual o més petita que G,
F també és més gran, igual o més petita que H.

I E i F són equimúltiples respectius de A i B,
i G i H equimúltiples arbitraris respectius de C i D.

Així, A és a C com B [és] a D. [Dv 5]

I això és el que volíem demostrar. ♠

Ev 17. *Si unes magnituds són proporcionals* componendo, *també ho són* separando.[867]

Siguin AB, BE, CD i DF magnituds compostes proporcionals,
[és a dir,] AB [és] a BE com CD [és] a DF.

Afirmo que si les separem també són proporcionals,
és a dir, AE [és] a EB com CF [és] a DF.

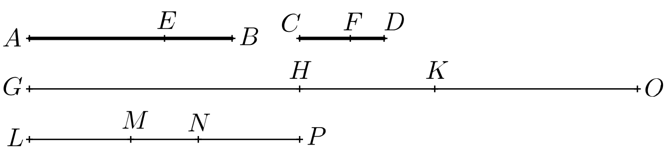


Figura Ev 17

[*Demostració.*] Considerem GH i HK, i LM i MN equimúltiples de AE i EB i de CF i FD, respectivament,
i KO i NP equimúltiples arbitraris de EB i FD, respectivament.

Com que GH i HK són equimúltiples respectius de AE i EB,
GH i GK són equimúltiples respectius de AE i AB. [Ev 1]

867. En símbols: si $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}}$, aleshores $\frac{\mathfrak{A}-\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{C}-\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}}$. També expressable en la forma: si $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}+\mathfrak{D}}$, aleshores $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}}$.

Però GH i LM són equimúltiples respectius de AE i CF.

En conseqüència, GK i LM són equimúltiples respectius de AB i CF.

De bell nou, com que LM i MN són equimúltiples respectius de CF i FD,
LM i LN són equimúltiples respectius de CF i CD. [Ev 1]

Però LM i GK són equimúltiples respectius de CF i AB.

Aleshores, GK i LN són equimúltiples respectius de AB i CD, respectivament.

Novament, com que HK i MN són equimúltiples respectius de EB i FD,
i KO i NP també ho són de EB i FD,
resulta que HO i MP també ho són de EB i FD. [Ev 2]

I, com que AB [és] a BE com CD [és] a DF,
si considerem els equimúltiples GK i LN de AB i CD [, respectivament,]
i els equimúltiples HO i MP de EB i FD [, respectivament,]
tenim que si GK és més gran, igual o més petita que HO,
LN també és més gran, igual o més petita que MP. [Dv 5]

Suposem que GK excedeix HO i sostraiem HK de totes dues [magnituds].

Tenim que GH excedeix KO. [Nc 2 i 4′]

Però hem vist que si GK excedia HO, LN també excedia MP.

Per tant, LN també excedeix MP.

Sostraient MN de tots dos, tenim que LM també excedeix NP.

I, doncs, si GH excedeix KO, LM també excedeix NP.

Anàlogament, podem establir que si GH és igual a KO,
LM també ho és a NP.

I, a més, si [GH és] més petita que KO, LM també ho és més que NP.

Però GH i LM són equimúltiples [respectius] de AE i CF,
i KO i NP equimúltiples arbitraris [respectius] de EB i FD.

D'això en resulta que AE és a EB com CF [és] a FD. [Dv 5]

I això és el que volíem demostrar. ♠

Ev 18. *Si* [*quatre*] *magnituds separades són proporcionals, també ho són quan es componen.*[868]

Siguin AE, EB, CF i FD magnituds proporcionals *separando*, [és a dir,] AE [és] a EB com CF [és] a FD.

Afirmo que també són proporcionals *componendo*, [és a dir,] AB [és] a BE com CD [és] a FD.

[*Demostració.*] Si aquest no és el cas,[869]
és a dir, si no és veritat que AB és a BE com CD [és] a FD,
aleshores AB és a BE
com CD [és] a una magnitud més gran o més petita que DF.[870]

a) En primer lloc,[871] suposem que això es compleix per a una magnitud més petita [que DF, com ara] DG.

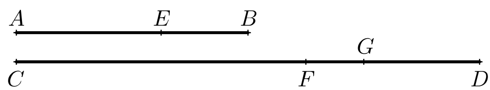


Figura Ev 18

Com que les magnituds compostes són proporcionals,
[és a dir,] AB és a BE com CD [és] a DG,
també ho són separades. [Ev 17]

Aleshores, AE és a EB com CG [és] a GD.

Però hem suposat que AE [és] a EB com CF [és] a FD.

Aleshores, [tenim] que CG [és] a GD com CF [és] a FD, [Ev 11]
i la primera [magnitud], CG, [és] més gran que la tercera, CF.

Per tant, la segona [magnitud], GD, també [és] més gran que la quarta, FD. [Ev 14]

Però també és més petita que FD. I això és impossible.

Així doncs, no és [el cas que] AB sigui a BE com CD [és] a una [magnitud] més petita que FD. ♠

Anàlogament, podem demostrar que tampoc ho és amb una de més gran [que FD].[872] ♠

---

868. En símbols: si $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}}$, aleshores $\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{C}+\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}}$.

869. Hipòtesi de l'absurd.

870. Aquí Euclides suposa que, donades tres magnituds, *existeix* una quarta proporcional. Però això solament ho demostra per a segments rectilinis [Evi 12].

871. La demostració es fa per casos.

872. Vegeu la nota 870.

En conseqüència, ho ha de ser amb FD necessàriament.

I això és el que volíem demostrar. ♠

Ev 19. *Si una magnitud és a una magnitud com el residu de sostreure una part és [al residu de sostreure] una altra part, els subtrahends són com les magnituds inicials.*[873]

La magnitud AB és a la CD com la subtrahend AE [és] a la subtrahend CF.

Afirmo que la diferència dels antecedents, EB, és a la dels conseqüents, FD, com la magnitud AB [és] a la CD.

[*Demostració.*] Com que AB és a CD com AE [és] a CF,

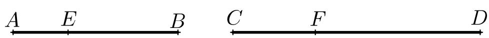


Figura Ev 19

alternando, resulta que BA [és] a AE com DC [és] a CF. [Ev 16]

I, com que les magnituds compostes són proporcionals, també ho són [quan] les separem,

[és a dir,] BE [és] a EA com DF [és] a CF. [Ev 17]

Alternando, BE [és] a DF com EA [és] a FC. [Ev 16]

Però hem suposat que AE [és] a CF com AB [és] a CD. [Ev 11]

I, aleshores, el residu EB [és] al residu FD com AB és a CD.

I això és el que volíem demostrar. ♠

Ev 19, porisma. De tot això en resulta clarament que *si [quatre] magnituds compostes són proporcionals, també ho són les magnituds obtingudes* convertendo.[874]

I això és el que volíem demostrar. ♠

Ev 20. *Suposem que tenim dues col·leccions de tres magnituds cadascuna que, dues a dues, tenen la mateixa raó,*[875] *i [suposem que]* ex æquali *la primera és més gran, igual o més petita que la tercera. Aleshores, la quarta també és més gran, igual o més petita que la sisena, respectivament.*[876]

---

873. En símbols: si $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{A}-\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}-\mathfrak{D}}$, aleshores $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}} = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$.

874. En símbols: si $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}}$, aleshores $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}-\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}-\mathfrak{D}}$.

875. És a dir, en proporció contínua.

876. En símbols: si $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{E}}$ i $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}} = \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{F}}$, aleshores $\mathfrak{A} \gtreqless \mathfrak{C}$ implica $\mathfrak{D} \gtreqless \mathfrak{F}$.

Suposem que A, B i C són tres magnituds, i D, E i F unes altres [tres],
i que dues a dues tenen la mateixa raó,
[és a dir,] A [és] a B com D [és] a E, i B [és] a C com E [és] a F.

Suposem que, *ex æquali*, [Dv 17]
[la magnitud] A és més gran, igual o més petita que [la magnitud] C.

Afirmo que D també és més gran, igual o més petita que F.

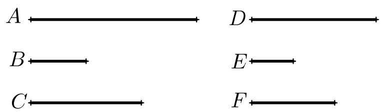


Figura Ev 20

[*Demostració.*] *a*) En el supòsit que A sigui més gran que C, i B sigui una altra [magnitud],
[sabem que] la [magnitud] més gran tindria una raó més gran que la que té la més petita amb la mateixa [magnitud]. [Ev 8]

Per tant, A té amb B una raó més gran que la que té C amb B.

Però A [és] a B com D [és] a E.

I, *invertendo* [B és a C com E és a F], tenim que C [és] a B com F [és] a E. [Ev 7, porisma]

Així doncs, D té una raó més gran amb E que la que hi té F. [Ev 13]

I, entre [magnituds] proporcionals, la que té una raó més gran [amb una mateixa magnitud] és més gran. [Ev 10]

D'això en resulta que D [és] més gran que F. ♠

b) De manera semblant, podem veure que si A és igual a C, D és igual a F. [Ev 9 i 11] ♠

c) I, finalment, si [A] és més petita [que C, D també] és més petita [que F]. ♠

I això és el que volíem demostrar. ♠

Ev 21. *Si tenim dues col·leccions de tres magnituds que, dues a dues, tenen la mateixa raó i pertorbem la proporció, i,* ex æquali*, la primera és més gran, igual o més petita que la tercera, aleshores la quarta també és més gran, igual o més petita que la sisena.*[877]

Siguin A, B i C tres magnituds, i D, E i F tres més,
que, dues a dues, tenen la mateixa raó.

877. En símbols: si $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{E}}$ i $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}} = \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{D}}$, aleshores $\mathfrak{A} \gtreqless \mathfrak{C}$ implica $\mathfrak{D} \gtreqless \mathfrak{F}$.

Considerem la seva proporció pertorbada,
és a dir, A [és] a B com E [és] a F, i B [és] a C com D [és] a E.

Suposem que, *ex æquali*, [Dv 17]
A és més gran, igual o més petita que C.

Aleshores D també és més gran, igual o més petita que F [, respectivament].

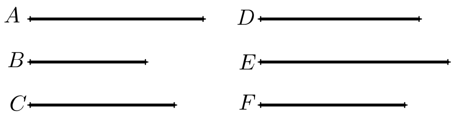


Figura Ev 21

[*Demostració.*] *a*) Atès que
A és més gran que C
i B [és] una altra [magnitud],
A té una raó més gran amb B que C amb B. [Ev 8]

Però, atès que A [és] a B com E [és] a F,
resulta que, *invertendo* [B és a C com D és a E], tenim que C [és] a B com E [és] a D. [Ev 7, porisma]

Aleshores, E també té una raó més gran amb F que la que E [té] amb D, [Ev 13]
i la [magnitud] amb la qual una mateixa [magnitud] té una raó més gran és [la magnitud] més petita. [Ev 10]

En conseqüència, F és més petita que D i, per tant, D és més gran que F. ♠

b) De manera semblant, podem establir que si A és igual a C, D és igual a F. [Ev 7 i 7, porisma, 9 i 11] ♠
c) I, a més, [podem establir] que si A és més petita que C,
aleshores D [també] és més petita que F. ♠
I això és el que volíem demostrar. ♠

Ev 22. *Si dues col·leccions amb el mateix nombre de magnituds arbitràries tenen, dues a dues, la mateixa raó, també la tenen* ex æquali.[878]

Considerem un cert nombre de magnituds arbitràries, A, B i C,
i [una] altra quantitat [de magnituds en el mateix nombre que l'anterior], D, E i F.

878. En símbols: si $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{E}}$, $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}} = \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{F}}$, aleshores $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}} = \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{F}}$.

I suposem que, dues a dues, tenen la mateixa raó,
[és a dir,] que A [és] a B com D [és] a E, i B [és] a C com E [és] a F.

Afirmo que també tenen la mateixa raó via *ex æquali*, [Dv 17]
[és a dir, A és a C com D és a F].[879]

[*Demostració*.] Prenem els equimúltiples G i H de A i D,
els equimúltiples arbitraris K i L de B i E,
i els equimúltiples arbitraris M i N de C i F.

Atès que A és a B com D [és] a E,
que hem pres els equimúltiples G i H de A i D
i els equimúltiples arbitraris K i L de B i E,
resulta que G és a K com H [és] a L. [Ev 4]

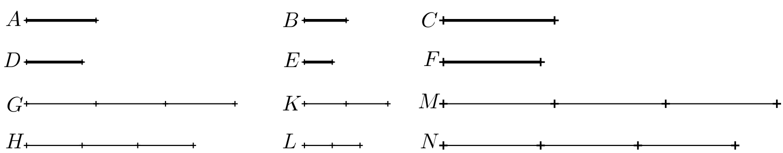


Figura Ev 22

Per les mateixes [raons], K [és] a M com L [és] a N.

Per tant, com que G, K i M són tres magnituds,
i H, L i N una quantitat [de magnituds] en el mateix nombre que les d'abans,
[que, de dues en dues,] tenen la mateixa raó,
ex æquali, si G és més gran, igual o més petita que M,
H també és més gran, igual o més petita que N. [Ev 20]

I G i H són equimúltiples respectius de A i D,
i M i N equimúltiples arbitraris respectius de C i F.

Aleshores, A és a C com D [és] a F. [Dv 5]

I això és el que volíem demostrar. ♠

879. Pensem-ho així, $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{E}}$ i $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}} = \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{F}}$ implica $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} \times \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}} = \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{E}} \times \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{F}}$. I ho podem escriure en la forma $\frac{\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}\times\mathfrak{C}} = \frac{\mathfrak{D}\times\mathfrak{E}}{\mathfrak{E}\times\mathfrak{F}}$, que, per analogia amb els segments i els rectangles, podem pensar que implica $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}} = \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{F}}$. Però aquesta interpretació de la «raó composta» —força aclaridora— no té cabuda als *Elements*.

Ev 23. *Si tenim dues col·leccions de tres magnituds els termes de les quals tenen, dos a dos, la mateixa raó, i pertorbem llur proporció, aleshores també tenen la mateixa raó* ex æquali.[880]

Siguin A, B i C tres magnituds, i D, E i F tres més,
que, dues a dues, tenen la mateixa raó.

I considerem-ne la raó pertorbada,
és a dir, A [és] a B com E [és] a F, i B [és] a C com D [és] a E.

Afirmo que A és a C com D [és] a F.

[*Demostració.*] Considerem els equimúltiples respectius G, H i K de A, B i D,
i els equimúltiples arbitraris respectius L, M i N de C, E i F.

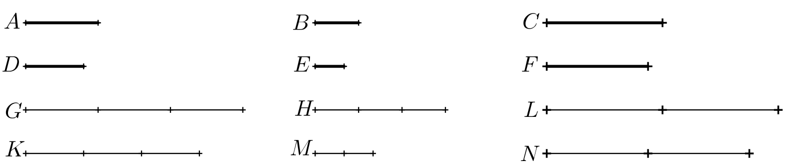


Figura Ev 23

Com que G i H són equimúltiples respectius de A i B,
i les parts tenen la mateixa raó que els múltiples, [Ev 15]
resulta que A [és] a B com G [és] a H.

Per les mateixes [raons], E [és] a F com M [és] a N.

Com que A és a B com E [és] a F,
G [és] a H com M [és] a N. [Ev 11]

I, atès que B és a C com D [és] a E,
alternando, també B [és] a D com C [és] a E. [Ev 16]

I, com que H i K són equimúltiples respectius de B i D,
i les parts tenen la mateixa raó que les [magnituds] equimúltiples, [Ev 15]
B és a D com H [és] a K.

Però B [és] a D com C [és] a E.

I, aleshores, H [és] a K com C [és] a E. [Ev 11]

Novament, com que L i M són equimúltiples respectius de C i E,
C és a E com L [és] a M. [Ev 15]

880. Si $<\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}>$ formen una proporció pertorbada amb $<\mathfrak{D}, \mathfrak{E}, \mathfrak{F}>$, és a dir, $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{F}}$ i $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}} = \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{E}}$, també es compleix que $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}} = \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{F}}$.

Però C [és] a E com H [és] a K.

I, aleshores, H [és] a K com L [és] a M. [Ev 11]

Alternando, H [és] a L com K [és] a M. [Ev 16]

I també s'ha provat que G [és] a H com M [és] a N.

En conseqüència, com que G, H i L són tres magnituds
i K, M i N unes altres tres,
que, dues a dues, tenen la mateixa raó
i la seva proporció és la proporció pertorbada,
resulta que, *ex æquali*, si G és més gran, igual o més petita que L,
K també és més gran, igual o més petita que N, [Ev 21]
i G i K són equimúltiples respectius de A i D, i L i N ho són de C i F.

Així, A [és] a C com D [és] a F. [Dv 5]

I això és el que volíem demostrar. ♠

Ev 24. *Si una primera [magnitud] té amb una segona la mateixa raó que una tercera [té] amb una quarta, i una cinquena [magnitud] té amb la segona la mateixa raó que una sisena [té] amb la quarta, aleshores les [magnituds] primera i cinquena, juntes, també tindran amb la segona la mateixa raó que les [magnituds] tercera i sisena [, juntes, tenen] amb la quarta.*[881]

La primera magnitud, AB, té amb la segona, C, la mateixa raó que la tercera, DH, té amb la quarta, F.

I la cinquena, BG, amb la segona, C, la mateixa raó que la sisena, EH, amb la quarta, F.

Afirmo que les [magnituds] primera i cinquena [juntes], AG, tenen amb la segona, C, la mateixa raó que les [magnituds] tercera i sisena [juntes], DB, tenen amb la quarta, F.

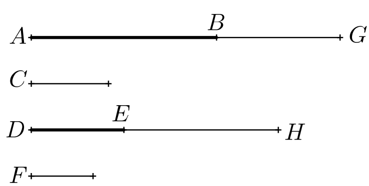


Figura Ev 24

[*Demostració*.] Atès que BG [és] a C com EH [és] a F,
invertendo, C és a BG com F és a EH. [Ev 7, porisma]

881. En símbols: si $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}}$ i $\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{D}}$, aleshores $\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{E}}{\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{C}+\mathfrak{F}}{\mathfrak{D}}$.

Per tant, tenim que AB és a C com DE és a F,
i C és a BG com F és a EH.

En conseqüència, *ex æquali*, AB és a BG com DE és a EH. [Ev 22]

I, atès que les magnituds són proporcionals *separando*, també ho són *componendo*. [Ev 18]

En conseqüència, AG és a GB com DH és a HE. [Ev 22]

I això és el que volíem demostrar. ♠

Ev 25. *Si quatre magnituds són proporcionals, aleshores la més gran i la més petita [juntes] són més grans que les altres dues [juntes].*[882]

Siguin AB, CD, E i F quatre magnituds proporcionals,
[és a dir,] AB [és] a CD com E [és] a F.

I suposem que AB és la [magnitud] més gran i F la més petita.

Afirmo que AB i F [juntes] són una magnitud més gran que CD i E [juntes].

[*Demostració.*] Siguin AG i CH iguals a E i F, respectivament.

Com que AB és a CD com E [és] a F,
i E [és] igual a AG i F a CH,
resulta que AB és a CD com AG [és] a CH.[883]

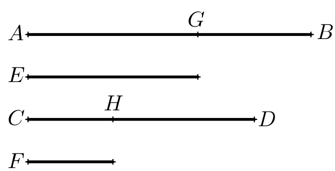


Figura Ev 25

I, com que la [magnitud] completa AB és a la [magnitud] completa CD com la [part] sostreta AG [és] a la [part] sostreta CH,
el residu GB és al residu HD com tot AB [és] a tot CD. [Ev 19]

882. Si $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ i $\mathfrak{D}$ són proporcionals, i $\mathfrak{A}$ és la més gran i $\mathfrak{D}$ la més petita, aleshores $\mathfrak{A} + \mathfrak{D} > \mathfrak{B} + \mathfrak{C}$. D'això, podem deduir-ne que, necessàriament, $\mathfrak{A} > \mathfrak{B} > \mathfrak{C} > \mathfrak{D}$? (Vegeu el problema 46, pàgina 66.) Hi ha, tanmateix, un cas particular, que Euclides no té en compte. Correspon al cas $\mathfrak{B} = \mathfrak{C}$. En aquest cas, «la mitjana aritmètica de dues magnituds és més gran que la geomètrica». Aquest resultat es demostra en el cas particular de segments rectilinis a Evi 27. I fa falta com a «diorisma» per a les equacions de segon grau. Observem que, fins i tot acceptant, com hem fet fins ara, que les magnituds estan regides per una mena d'«aritmètica» —suma, resta, divisió en parts iguals, etc.—, és difícil justificar l'«existència» de la mitjana proporcional.

883. Pel principi de substitució.

Però [suposem que] AB [és] més gran que CD.
D'això en resulta que GB també [és] més gran que HD
i, com que AG és igual a E i CH a F,
AG i F [juntes] són iguals a CH i E [juntes]. [Nc 2]
I, atès que les totalitats són diferents si magnituds iguals s'afegeixen a magnituds diferents, [Nc 4′]
i que AG i F s'afegeix a GB, i CH i E a HD
—on GB i HD són diferents i GB [és] més gran [que HD]—,
AB i F [juntes] són més grans que CD i E [juntes].
I això és el que volíem demostrar. ♠

A.2.2 Llibre sisè: EVI

p. 53 **Comentaris.** Aquest llibre —amb quatre definicions i trenta-tres proposicions— és un llibre absolutament geomètric. S'hi apliquen tots els resultats —definicions i proposicions— dels llibres precedents, i en particular, els de la teoria de la proporció eudoxiana del llibre V, als objectes geomètrics.

Recull, entre altres resultats, els següents: la generalització del teorema bàsic del tangram euclidià [EI 36 i 38] —amb arrels en l'escola pitagòrica [EVI 1]—; el teorema de Tales aplicat als triangles i als polígons, tant per a longituds [EVI 2] com per a superfícies [EVI 19 i 20]; la determinació de la tercera, la quarta i la mitjana proporcional [EVI 11, 12 i 13]; i —novament— la construcció del segment auri [EVI 30]. També s'hi estableix la generalització del teorema de Pitàgores que s'obté quan en lloc d'usar quadrats sobre els costats del triangle rectangle, s'hi construeixen polígons semblants entre si [EVI 31]; la transitivitat de la semblança de figures rectilínies [EVI 21]; i una definició alternativa de la proporcionalitat de quatre segments A, B, C i D («l'equivalència dels rectangles de costats A i D, i B i C» [EVI 15]).

A més, s'hi determina que en un segment rectilini donat, sempre s'hi pot construir una figura semblant a una figura rectilínia donada per endavant [EVI 18]; i que els paral·lelograms travessats per la diagonal d'un paral·lelogram són semblants entre si i al total [EVI 24].

I també s'hi estudia l'aplicació d'àrees amb tota la seva generalitat [EVI 28 i 29]. De fet, s'hi construeixen les arrels del que algèbricament seria una equació quadràtica o de segon grau. Per tant, s'hi afirma la possibilitat de resoldre, amb regle i compàs, un problema que té els orígens en la matemàtica mesopotàmica.[884]

Un altre fenomen que hi és present és la possibilitat de construir una figura semblant a una segona i equivalent a una tercera [EVI 25].

Finalment, tanca el llibre la proposició que estableix la proporcionalitat entre els angles centrals i inscrits i els arcs que subtendeixen en els cercles del mateix radi [EVI 33].

A.2.2*a* Les definicions d'EVI (Ὅροι)

p. 53

DVI 1. Les *figures rectilínies semblants* són aquelles que tenen els angles respectius iguals, i els costats corresponents als angles iguals, proporcionals.[885]

DVI 2. Les *figures inversament proporcionals* són aquelles en les quals els costats que subtendeixen angles iguals són inversament proporcionals.[886]

---

884. Vegeu PLA (2016*b*), § 2.7.5, 2.7.6 i 2.7.8, p. 194, 204 i 212.

885. Aquesta definició es troba a ARISTÒTIL (1987), II 17, 99 a 13, edició castellana, p. 433. Hi usa τὸ ὅμοιον, «homònim», per a dir «semblant», entenent que té els «costats proporcionals i els angles iguals».

886. La definició del text grec, que parla de «raons d'antecedents i conseqüents», és confusa. En concret diu: Ἀντιπεπονθότα, δέ σχήματά έστιν, ὅταν ἐν ἐκατερῳ τῶν σχημάτων ἡγούμενοί τέ καὶ ἐπομενοι λόγοι ὦσιν. Vegeu HEATH (1925), edició del 1956, volum II, p. 182; PUERTAS (1994), p. 55, nota 39.

DVI 3. Un segment rectilini es divideix en *mitjana i extrema raó* quan el segment sencer és a la part gran com la part gran és a la petita.[887]

DVI 4. L'*altura* —ὕψος— d'una figura és el segment perpendicular que va del vèrtex [de la figura] a la base.[888]

p. 53

A.2.2*b* Les proposicions d'EVI

[*La teoria general de la proporció aplicada a la geometria plana*]

EVI 1. *Els triangles i els paral·lelograms que tenen la mateixa altura són entre si com llurs bases.*[889]

Siguin $\triangle ABC$ i $\triangle ACD$ dos triangles, i $\varparallelogram EC$ i $\varparallelogram CF$ dos paral·lelograms, amb la mateixa altura AM.

Afirmo que: *a*) la base BC és a la base CD com el triangle $\triangle ABC$ [és] al triangle $\triangle ACD$, i *b*) la base BC és a la base CD com el paral·lelogram $\varparallelogram EC$ és al paral·lelogram $\varparallelogram CF$.

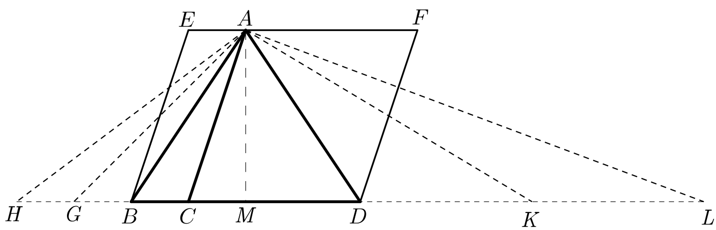


FIGURA EVI 1

[*Demostració.*] *a*) Suposem que hem prolongat BD en totes dues direccions fins als punts H i L. [P 2]

887. És curiós que aquesta definició aparegui tan enrere, al llibre VI, quan a EII 11 s'havia establert l'existència del punt que divideix el segment en mitjana i extrema raó.

888. És una definició de legitimitat dubtosa. Aristòtil usa la paraula καθέτος, «perpendicular»; literalment, «que cau». A més, *l'altura* d'una figura és ambigua perquè una figura té diverses altures.

889. Aquí, un cop definida l'altura, encara que la definició sigui il·legítima, ja es pot usar. Val la pena comparar aquest enunciat amb els d'EI 35, 36, 37 i 38, en què s'usa: «La figura —triangle o paral·lelogram— *està entre segments paral·lels.*»

Considerem [un cert nombre de segments] BG i GH iguals a la base BC, [EI 2]
i [un cert nombre de segments] DK i KL iguals a la base CD.[890] [EI 2]

I unim AG, AH, AK i AL. [P 1]

Com que CB, BG i GH són iguals entre si,
i els triangles $\triangle AHG, \triangle AGB$ i $\triangle ABC$ també ho són, [EI 38][891]
resulta que la base HC admet la base BC [com a part]
tantes vegades com el triangle $\triangle AHC$ admet el triangle $\triangle ABC$ [com a part].

Per les mateixes raons, la base CD és [part] de la base LC tantes vegades com el triangle $\triangle ACD$ és [part del] triangle $\triangle ALC$.

I, si la base HC és igual, més gran o més petita que la base CL, aleshores el triangle $\triangle AHC$ també és igual, més gran o més petit que el triangle $\triangle ACL$. [EI 38]

Així, tenim quatre magnituds, dues bases, BC i CD, i dos triangles, $\triangle ABC$ i $\triangle ACD$.[892]

Hem pres un nombre arbitrari de múltiples de la base BC i del triangle $\triangle ABC$,
[és a dir,] la base HC i el triangle $\triangle AHC$,
i una altra quantitat arbitrària de múltiples de la base CD i el triangle $\triangle ADC$,
[és a dir,] la base LC i el triangle $\triangle ALC$.

I hem vist que si la base HC és més gran, igual o més petita que la base CL,
aleshores el triangle $\triangle AHC$ també és més gran, igual o més petit que el triangle $\triangle ALC$.

En definitiva, la base BC és a la base CD com el triangle $\triangle ABC$ [és] al triangle $\triangle ACD$. [DV 5] ♠

b) Com que el paral·lelogram $\varparallelogram EC$ és el doble del triangle $\triangle ABC$
i el paral·lelogram $\varparallelogram FC$ és el doble del triangle $\triangle ACD$, [EI 49]

890. Malgrat el que pugui suggerir la figura, el nombre de segments considerats en un i altre cas és arbitrari i, per tant, no és necessàriament el mateix.

891. Vegeu la nota 890.

892. Fixem-nos que són de la mateixa classe, per parelles.

i les parts tenen la mateixa raó que els múltiples semblants, [Ev 15]
el triangle $\triangle ABC$ és al triangle $\triangle ACD$ com el paral·lelogram ▱ EC [és] al [paral·lelogram] ▱ FC. ♠

De fet, com que hem provat que la base BC [és] a [la base] CD com el triangle $\triangle ABC$ [és] al triangle $\triangle ACD$,
i com que el triangle $\triangle ABC$ [és] al triangle $\triangle ACD$ com el paral·lelogram ▱ EC [és] al paral·lelogram ▱ CF,
resulta que la base BC també [és] a la base CD com el paral·lelogram ▱ EC [és] al [paral·lelogram] ▱ FC. [Ev 11]
I això és el que volíem demostrar.[893] ♠[894]

Evi 2. [**Teorema de Tales.**] a) *Si tirem un segment paral·lel a un dels costats d'un triangle, tallarà els* [*altres dos*] *costats proporcionalment.* b) *I, si tallem* [*dos dels*] *costats d'un triangle proporcionalment, aleshores el segment que uneix els punts de tall és paral·lel a l'altre costat.*
a) Suposem que hem tirat el segment DE paral·lel a un dels costats, BC, del triangle $\triangle ABC$.

Afirmo que BD és a DA com CE és a EA.
[*Demostració.*] Unim BE i CD. [P 1]

Aleshores, el triangle $\triangle BDE$ és equivalent al [triangle] $\triangle CDE$
perquè tenen una base comuna, DE,
i estan col·locats entre els mateixos paral·lels. [Ei 38]

D'altra banda, tenim el triangle $\triangle ADE$ amb la seva àrea.

Ara bé, els triangles iguals tenen la mateixa raó amb un mateix [triangle]. [Ev 7]

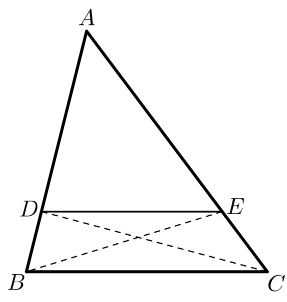


Figura Evi 2

És a dir, el triangle $\triangle BDE$ és al [triangle] $\triangle ADE$
com el triangle $\triangle CDE$ [és] al triangle $\triangle ADE$.

Però, d'altra banda, el triangle $\triangle BDE$ [és] al triangle $\triangle ADE$

893. Aquest teorema ens va permetre intuir el raonament seguit per Èudox per a establir la definició general de «proporció». Vegeu Pla (2016*c*), p. 315–318.

894. No cal que els triangles i els paral·lelograms tinguin un segment comú.

com [el segment] BD és a [el segment] DA,
atès que tenen la mateixa altura —el segment perpendicular de [el punt] E al [costat] AB.

En conseqüència, tots dos triangles són com les seves bases. [Evi 1]

I, per les mateixes [raons], el triangle $\triangle CDE$ [és] al [triangle] $\triangle ADE$
com [el segment] CE [és] a [el segment] EA. [Evi 1]

D'això en resulta que BD [és] a DA com CE [és] a EA. [Ev 11] ♠

b) Suposem que hem tallat els costats AB i AC del triangle $\triangle ABC$ proporcionalment,
[és a dir, de manera que] BD [és] a DA com CE [és] a EA.

Unim DE. [P 1]

Afirmo que [els segments] DE i BC són paral·lels.

[*Demostració.*] Per construcció, BD és a DA com CE [és] a EA,
però BD [és] a DA com el triangle $\triangle BDE$ [és] al [triangle] $\triangle ADE$.

I, atès que CE [és] a EA com el triangle $\triangle CDE$ [és] al [triangle] $\triangle ADE$, [Evi 1]
el triangle $\triangle BDE$ [és] al [triangle] $\triangle ADE$ com el triangle $\triangle CDE$ [és] al [triangle] $\triangle ADE$. [Ev 11]

Així doncs, els dos triangles $\triangle BDE$ i $\triangle CDE$ tenen la mateixa raó amb [el triangle] $\triangle ADE$.

En conseqüència, els triangles $\triangle BDE$ i $\triangle CDE$ són equivalents [Ev 9]
i tenen la mateixa base DE.

I triangles equivalents, amb la mateixa base, estan situats entre els mateixos (segments) paral·lels. [Ei 39]

En definitiva, DE i BC són paral·lels. ♠

I això és el que volíem demostrar. ♠

Evi 3. [**Teorema de la bisectriu.**] *Si dimidiem un angle*[895] *d'un triangle i la bisectriu talla la base, aleshores els segments de la base són proporcionals als altres costats del triangle. I, si els segments de la base són proporcionals als altres costats del triangle, aleshores el seg-*

895. Per Euclides, l'angle és intern. Què passaria si l'angle fos un angle extern del triangle? Vegeu el problema 48 (pàgina 67).

ment que uneix el vèrtex amb el punt de tall és una bisectriu [*de l'angle*].

Sigui $\triangle\, ABC$ un triangle.

a) Suposem que el segment AD dimidia l'angle $\widehat{BAC}$.

Afirmo que BD és a CD com BA [és] a AC.

[*Demostració.*] Pel [punt] C tirem [el segment] CE paral·lel a DA. [EI 31]

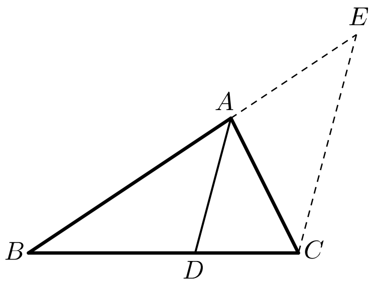


FIGURA EVI 3

La prolongació de BA talla [CE] [pel punt] E. [P 2 i 5[896]]

Atès que el segment AC talla dos (segments) paral·lels AD i EC, els angles $\widehat{ACE}$ i $\widehat{CAD}$ són iguals. [EI 29]

Però els angles $\widehat{CAD}$ i $\widehat{BAD}$ són iguals. [, per construcció]

Per tant, els angles $\widehat{BAD}$ i $\widehat{ACE}$ també ho són. [Nc 1]

Novament, el segment BAE talla els (segments) paral·lels AD i EC.

Per tant, l'angle extern, $\widehat{BAD}$, i l'intern, $\widehat{AEC}$, són iguals. [EI 29]

I [hem vist] que [els angles] $\widehat{ACE}$ i $\widehat{BAD}$ també ho són. [EI 29]

En conseqüència, els angles $\widehat{ACE}$ i $\widehat{AEC}$ també són iguals. [Nc 1]

D'això en resulta que els costats AE i AC són iguals. [EI 6]

A més, com que hem tirat el segment AD paral·lel a un dels costats, [el costat] EC del triangle $\triangle\, BCE$,

tenim que BD és a DC com BA [és] a AE. [EVI 2]

Però AE [és] igual a AC.

En definitiva, doncs, BD [és] a DC com BA [és] a AC.[897] ♠

b) Ara, [suposem que] BD és a DC com BA [és] a AC.

Unim AD. [P 1]

Afirmo que el segment AD és la bisectriu de l'angle $\widehat{BAC}$.

[*Demostració.*] Amb la mateixa construcció,[898]

896. Aquesta afirmació pot ser establerta amb tota correcció usant P 5. Vegeu el problema 49 (pàgina 67).

897. Acceptem la validesa del principi de substitució en les proporcions: «Si substituïm un terme d'una proporció per un altre d'igual obtenim també una proporció» [Nc 1 i EV 7 i 11].

898. Tirem el segment CE paral·lel a AD, que talla la prolongació del

atès que BD és a DC com BA [és] a AC,
tenim que BD [és] a DC com BA és a AE, ja que AD és paral·lel al [costat] EC del triangle $\triangle BCE$. [Evi 2]

Aleshores, també BA [és] a AC com BA [és] a AE. [Ev 11]

En conseqüència, AC [és] igual a AE. [Ev 9]

Per tant, els angles $\widehat{AEC}$ i $\widehat{ACE}$ són iguals. [Ei 5]

Ara bé, [els angles interns] $\widehat{AEC}$ i $\widehat{ACE}$ [són] iguals als [angles] externs $\widehat{BAD}$ i $\widehat{CAD}$, respectivament. [Ei 29]

Aleshores, els angles $\widehat{BAD}$ i $\widehat{CAD}$ també ho són. [Nc 1]

En definitiva, el segment AD dimidia l'angle $\widehat{BAC}$. ♠

I això és el que volíem demostrar. ♠

Evi 4. [**Criteri AAA de semblança de triangles.**] *En triangles equiangles, els costats que subtendeixen angles iguals* [*, és a dir, els costats corresponents,*] *són proporcionals.*

Siguin $\triangle ABC$ i $\triangle DCE$ dos triangles equiangles,
amb els angles $\widehat{ABC}$ i $\widehat{BAC}$ iguals als [angles] $\widehat{DCE}$ i $\widehat{CDE}$, respectivament.[899]

[*Demostració.*] Col·loquem BC a la prolongació de [el segment] CE.

Atès que els angles $\widehat{ABC}$ i $\widehat{ACB}$
són més petits que dos angles rectes, [Ei 17]

i que [els angles] $\widehat{ACB}$ i $\widehat{DEC}$ [són] iguals,
resulta que [els angles] $\widehat{ABC}$ i $\widehat{DEC}$ [junts] són més petits que dos angles rectes.

Per tant, si prolonguem [els segments] BA i ED, es tallen. [P 2 i 5]

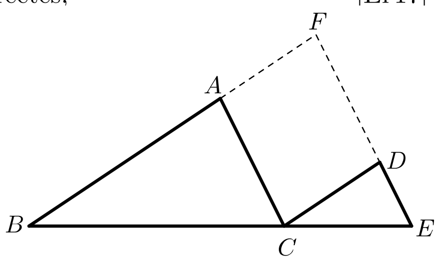


Figura Evi 4

Sigui, doncs, F el punt d'intersecció [de les prolongacions].

Com que els angles $\widehat{DCE}$ i $\widehat{ABC}$ són iguals,
[els segments] BF i CD són paral·lels. [Ei 28]

---

costat BA per un punt E.

899. És clar que només cal imposar que dos dels seus angles siguin iguals, ja que, en virtut d'Ei 32, la suma dels angles d'un triangle és invariant i val dos angles rectes.

Novament, com que [els angles] $\widehat{ACB}$ i $\widehat{DEC}$ són iguals,
[els segments] AC i FE són paral·lels. [EI 28]

D'això en resulta que ▱ $FACD$ és un paral·lelogram.

En conseqüència, [els costats] FA i DC, i AC i FD són iguals. [EI 34]

I, com que hem tirat AC paral·lel al [costat] FE del triangle $\triangle FBE$,
resulta que BA és a AF com BC [és] a CE, [EVI 2]
i que AF i CD són iguals.

Per tant, BA [és] a CD com BC [és] a CE,[900] [Nc 1 i E7 i 11]
i, *alternando*, AB [és] a BC com DC [és] a CE. [EV 16]

De bell nou, atès que [els segments] CD i BF són paral·lels,
BC [és] a CE com FD [és] a DE, [EVI 2]
i FD [és] igual a AC.

Per tant, BC és a CE com AC [és] a DE, [Nc 1 i E7 i 11]
i, *alternando*, BC [és] a CA com CE [és] a ED. [EV 16]

En conseqüència, com que hem vist que AB [és] a BC com DC [és] a CE, i BC [és] a CA com CE [és] a ED,
ex æquali, BA [és] a AC com CD [és] a DE. [EV 22]

I això és el que volíem demostrar. ♠

EVI 5. [**Criteri CCC de semblança de triangles.**] *Si dos triangles tenen els costats proporcionals, són equiangles i els angles que subtendeixen els costats corresponents són iguals.*

Siguin $\triangle ABC$ i $\triangle DEF$ dos triangles amb els costats proporcionals, [és a dir,] AB [és] a BC com DE [és] a EF, BC [és] a CA com EF [és] a FD i, finalment, BA [és] a AC com ED [és] a DF.

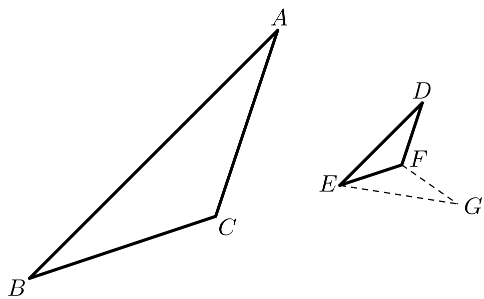


FIGURA EVI 5

Afirmo que els triangles $\triangle ABC$ i $\triangle DEF$ tenen els angles iguals, [de manera que] els angles que subtendeixen els costats corresponents són iguals.

900. Principi de substitució. Vegeu la nota 897 (pàgina 306).

[És a dir, l'angle] $\widehat{ABC}$ és igual a $\widehat{DEF}$, $\widehat{BCA}$ ho és a $\widehat{EFD}$ i, finalment, $\widehat{BAC}$ ho és a $\widehat{EDF}$.

[*Demostració*.] Construïm els angles $\widehat{FEG}$ i $\widehat{EFG}$ iguals als angles $\widehat{ABC}$ i $\widehat{ACB}$, respectivament.

I ho fem damunt el segment EF amb els vèrtexs als punts [respectius] E i F. [EI 23]

Aleshores, [els angles amb el vèrtex] a A i G són iguals. [EI 23]

Per tant, els triangles $\triangle\, ABC$ i $\triangle\, GEF$ són equiangles.

En conseqüència, els triangles $\triangle\, ABC$ i $\triangle\, GEF$ tenen els costats que subtendeixen angles iguals proporcionals, i els costats que els subtendeixen es corresponen. [EVI 4]

D'això en resulta que AB és a BC [com] GE [és] a EF.

Però hem suposat que AB [és] a BC com DE [és] a EF.

En conseqüència, DE [és] a EF com GE [és] a EF. [EV 11]

I, per tant, DE i GE tenen una mateixa raó amb EF.

D'això en resulta que DE és igual a GE. [EV 9]

Per les mateixes raons, DF és igual a GF.

A més, com que DE és igual a EG i EF [és] comú,
resulta que els dos [costats] DE i EF són iguals als dos [costats] GE i EF, respectivament, i que les bases DF i FG [són] iguals.

En conseqüència, els angles $\widehat{DEF}$ i $\widehat{GEF}$ són iguals, [EI 8]
i els triangles $\triangle\, DEF$ i $\triangle\, GEF$,
i els altres costats que subtendeixen angles iguals també ho són. [EI 4]

Aleshores, [els angles de cadascuna de les parelles de] els angles $\widehat{DFE}$ i $\widehat{GFE}$, i $\widehat{EDF}$ i $\widehat{EGF}$ són iguals [entre si].

I, com que [els angles] $\widehat{FED}$ i $\widehat{GEF}$, i $\widehat{GEF}$ i $\widehat{ABC}$ són iguals, respectivament,
resulta que els angles $\widehat{ABC}$ i $\widehat{DEF}$ també ho són. [Nc 1]

Per les mateixes raons, [els angles] $\widehat{ACB}$ i $\widehat{DFE}$ són iguals
i, de retruc, [els angles] [amb el vèrtex a] A i D també ho són.

En definitiva, els triangles $\triangle\, ABC$ i $\triangle\, DEF$ són equiangles.

I això és el que volíem demostrar. ♠

EVI 6. [**Criteri CAC de semblança de triangles.**] *Si dos triangles tenen un angle igual i els costats [corresponents que el formen] proporcionals, aleshores els triangles són equiangles i els angles que subten-*

deixen els costats corresponents són iguals.

Siguin $\triangle ABC$ i $\triangle DEF$ dos triangles amb un angle, $\widehat{BAC}$, igual a un angle, $\widehat{EDF}$,
i els costats [corresponents] dels angles iguals proporcionals,
[és a dir,] BA [és] a AC com ED [és] a DF.

Afirmo que els triangles $\triangle ABC$ i $\triangle DEF$ són equiangles,
i els angles $\widehat{ABC}$ i $\widehat{DEF}$, i $\widehat{ACB}$ i $\widehat{DFE}$ iguals, respectivament.

[*Demostració*.] Construïm [els angles] $\widehat{FDG}$ i $\widehat{DFG}$ iguals a un dels angles iguals, $\widehat{BAC}$ i $\widehat{EDF}$, i a l'angle $\widehat{ACB}$ amb un costat damunt el segment DF i [vèrtexs] als punts D i F [, respectivament]. [Ei 23]

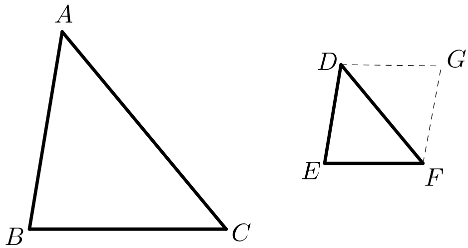


Figura Evi 6

D'això en resulta que els angles [amb els vèrtexs] a [els punts] B i G són iguals. [Ei 32]

Per tant, els triangles $\triangle ABC$ i $\triangle DGF$ són equiangles.

Aleshores, BA [és] a AC com GD [és] a DF. [Evi 4]

Però hem suposat que BA [és] a AC com ED [és] a DF.

En conseqüència, ED [és] a DF com GD [és] a DF. [Ev 11]

Aleshores, ED i DG [són] iguals [Ev 9]
i DF [és] comú.

Així doncs, els [costats] ED i DF són iguals als [costats] GD i DF [, respectivament,]
i els angles $\widehat{EDF}$ i $\widehat{GDF}$ també [ho són].

Per tant, les bases EF i GF, els triangles $\triangle DEF$ i $\triangle GDF$, i els altres angles, els que subtendeixen costats iguals, també són iguals, respectivament. [Ei 4]

En definitiva, [els angles de cada parella] $\widehat{DFG}$ i $\widehat{DFE}$, i $\widehat{DGF}$ i $\widehat{DEF}$ són iguals, respectivament.

Però [els angles] $\widehat{DFG}$ i $\widehat{ACB}$ són iguals.

Per tant, [els angles] $\widehat{ACB}$ i $\widehat{DFE}$ també ho són. [Nc 1]

A més, hem suposat la igualtat de [els angles] $\widehat{BAC}$ i $\widehat{EDF}$.

D'això se'n dedueix que l'altre [angle amb el vèrtex] a B és igual a l'altre [angle amb el vèrtex] a E. [Ei 32]

En definitiva, els triangles $\triangle ABC$ i $\triangle DEF$ són equiangles.

I això és el que volíem demostrar. ♠

Evi 7. [**Criteri ACC de semblança de triangles.**] *Si dos triangles tenen un angle igual, els costats que formen un altre angle són proporcionals, i si* a) *els altres dos angles són aguts, o* b) *un és recte o obtús*[901] [*i l'altre agut*], *aleshores els triangles són equiangles.*

Siguin $\triangle ABC$ i $\triangle DEF$ dos triangles amb un angle, $\widehat{BAC}$, igual a un angle, $\widehat{EDF}$,

i els costats dels altres angles, $\widehat{ABC}$ i $\widehat{DEF}$, proporcionals [, respectivament],

[és a dir,] AB [és] a BC com DE [és] a EF.

a) Els dos [angles amb vèrtexs] a C i F són aguts.

Afirmo que els triangles $\triangle ABC$ i $\triangle DEF$ són equiangles,

els angles $\widehat{ABC}$ i $\widehat{DEF}$ iguals,

i l'altre [angle amb el vèrtex] a C manifestament igual a l'altre [angle amb el vèrtex] a F.

[*Demostració.*] Suposem que els angles $\widehat{ABC}$ i $\widehat{DEF}$ són diferents,[902]

aleshores un és més gran que l'altre.

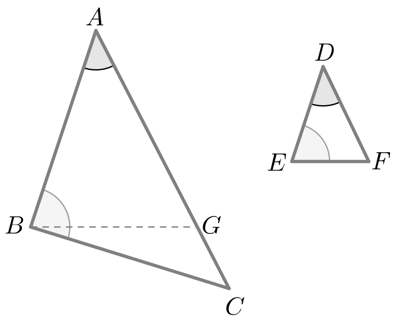


Figura Evi 7*a*

Suposem també que (l'angle) $\widehat{ABC}$ és el més gran [de tots dos]

i que hem construït (l'angle) $\widehat{ABG}$ igual a (l'angle) $\widehat{DEF}$ damunt el segment AB amb el vèrtex a B. [E 23]

Aleshores, com que els angles [amb el vèrtex] a A i D són iguals,

i [els angles] $\widehat{ABG}$ i $\widehat{DEF}$ també,

els altres [angles] $\widehat{AGB}$ i $\widehat{DFE}$ també ho són. [Ei 32]

901. Euclides diu: «tots dos angles són més petits que dos angles rectes» i «un, almenys, no és més petit que un angle recte».

902. Hipòtesi de l'absurd.

D'això en resulta que els triangles $\triangle\, ABG$ i $\triangle\, DEF$ són equiangles.

Per tant, AB és a BG com DE [és] a EF, [Evi 4]
i, per hipòtesi, DE [és] a EF com AB és a BC.

En definitiva, AB té la mateixa raó amb BC que amb BG. [Ev 11]

Per tant, BC [és] igual a BG. [Ev 9]

En conseqüència, l'angle [amb el vèrtex] a C i l'angle $\widehat{BGC}$ són iguals, [Ei 5]
i l'angle [amb el vèrtex] al punt C és agut.

En definitiva, doncs, (l'angle) $\widehat{BGC}$ també ho és.

Per tant, el seu angle adjacent, $\widehat{AGB}$, és obtús. [Ei 13]

Però hem vist que [l'angle $\widehat{AGB}$] i [l'angle amb el vèrtex] a F són iguals.

Així doncs, [l'angle amb el vèrtex] a F ha de ser obtús.

Però hem suposat que és agut. I això és absurd.

En definitiva, els angles $\widehat{ABC}$ i $\widehat{DEF}$ no són diferents;
per tant, són iguals.

Però [els angles amb el vèrtex] a A i D també ho són,
i els angles [restants amb els vèrtexs] a C i F també. ♠[903]

Per tant, els triangles $\triangle\, ABC$ i $\triangle\, DEF$ són equiangles. [Ei 32]

b) De bell nou, [recordem que] hem suposat que [cadascun de] els angles [amb el vèrtex] a C o F és recte o obtús.

Afirmo que, també en aquest cas, els triangles $\triangle\, ABC$ i $\triangle\, DEF$ són equiangles.

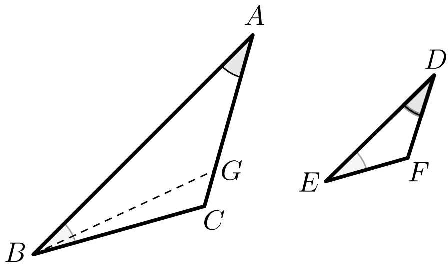


Figura Evi 7*b*

[*Demostració*.] Aleshores, amb la mateixa construcció, veiem que els costats BC i BG són iguals.

903. És curiosa, aquesta demostració. Euclides podria haver recorregut al fet que els triangles $\triangle\, ABG$ i $\triangle\, DEF$ són equiangles i que, per tant, tenen els costats proporcionals. D'això se'n dedueix: $\frac{AB}{DE} = \frac{BG}{EF} = \frac{GA}{FD}$, i, per hipòtesi, $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$. Aleshores, *invertendo* i usant que BC i BG tenen la mateixa raó amb EF, resulta que BC i BG són iguals.

Ara també, doncs, els angles [amb el vèrtex] a C i $\widehat{BGC}$ són iguals, [Ei 5]

i [l'angle amb el vèrtex] a C [és] recte o obtús.

Així doncs, $\widehat{BGC}$ no [és] agut.

Aleshores, [la suma de] dos dels angles del triangle $\triangle\, BGC$ no és inferior a dos angles rectes, cosa que és impossible. [Ei 17] ♠

De tot això en resulta que els angles $\widehat{ABC}$ i $\widehat{DEF}$ no poden ser diferents, o sigui, que són iguals.

I [els angles amb els vèrtexs] a A i D també ho són.

I els altres [angles amb vèrtexs] a C i F també ho són. [Ei 32]

En definitiva, els triangles $\triangle\, ABC$ i $\triangle\, DEF$ són equiangles.

I això és el que volíem demostrar. ♠

Evi 8. [**Primer teorema de l'altura d'un triangle rectangle.**] *Si des* [*del vèrtex*] *de l'angle recte d'un triangle rectangle tirem la perpendicular a la base, aleshores els dos triangles que determina la perpendicular són semblants entre si i també amb el* [*triangle rectangle*] *inicial.*

Sigui $\triangle\, ABC$ un triangle rectangle amb l'angle recte $\widehat{BAC}$.

Considerem la perpendicular AD de A a BC. [Ei 12]

Afirmo que

a) els triangles $\triangle\, ABD$ i $\triangle\, ADC$ són semblants entre si,

i b) cadascun també ho és amb el triangle inicial $\triangle\, ABC$.

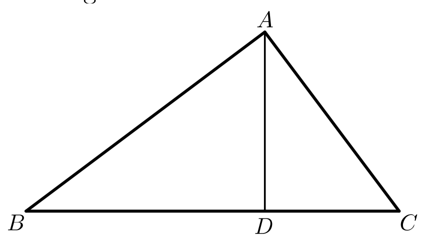


Figura Evi 8

[*Demostració.*] b) Com que [els angles] $\widehat{BAC}$ i $\widehat{ADB}$ són iguals —ja que són rectes— [P 4]

i l'angle [amb el vèrtex] a B [és] comú als triangles $\triangle\, ABC$ i $\triangle\, ABD$,

resulta que els altres [angles], $\widehat{ACB}$ i $\widehat{BAD}$, són iguals. [Ei 32]

Aleshores, els triangles $\triangle\, ABC$ i $\triangle\, ABD$ són equiangles.

Per tant, [el costat] BC, que subtendeix l'angle recte del triangle $\triangle\, ABC$, és a [el costat] BA, que subtendeix l'angle recte del triangle $\triangle\, ABD$,

com el mateix [costat] AB, que subtendeix l'angle [amb el vèrtex] a C del triangle $\triangle\, ABC$, [és] a [el costat] BD, que subtendeix (l'angle) igual $\widehat{BAD}$ del triangle $\triangle\, ABD$,
i, a més, com AC és a AD, que són els dos [costats] que subtendeixen l'angle [amb el vèrtex] a B; [Evi 4]
aleshores, els triangles $\triangle\, ABC$ i $\triangle\, ABD$ són equiangles
i tenen els costats dels angles iguals proporcionals.

Així doncs, els triangles $\triangle\, ABC$ i $\triangle\, ABD$ [són] semblants. [Dvi 1]

Igual que els triangles $\triangle\, ABC$ i $\triangle\, ADC$, també.

D'això en resulta que [els dos triangles] $\triangle\, ABD$ i $\triangle\, ADC$ són semblants al [triangle] inicial $\triangle\, ABC$. ♠

a) Ara afirmo que els triangles $\triangle\, ABD$ i $\triangle\, ADC$ també són semblants entre si.

[*Demostració.*] En efecte, com que els angles rectes $\widehat{BDA}$ i $\widehat{ADC}$ són iguals, [P 4]
i hem vist que (l'angle) $\widehat{BAD}$ i [l'angle amb el vèrtex] a C són iguals, resulta que els altres angles, [l'angle amb el vèrtex] a B i (l'angle) $\widehat{DAC}$, també ho són. [Ei 32]

Així doncs, els triangles $\triangle\, ABD$ i $\triangle\, ADC$ són equiangles.

Per tant, BD, que subtendeix (l'angle) $\widehat{BAD}$ del triangle $\triangle\, ABD$, és a DA, que subtendeix [l'angle amb el vèrtex] a C del triangle $\triangle\, ADC$ i [que és] igual a (l'angle) $\widehat{BAD}$,
com el mateix AD, que subtendeix l'angle [amb el vèrtex] a B del triangle $\triangle\, ABD$, és a DC, que subtendeix (l'angle) $\widehat{DAC}$ del triangle $\triangle\, ADC$ i [que és] igual [a l'angle amb el vèrtex] a B,
i també com BA és a AC, [ja que cadascun] subtendeix l'angle recte [respectiu]. [Evi 4]

De tot això en resulta que els triangles $\triangle\, ABD$ i $\triangle\, ADC$ són semblants. ♠ [Dvi 1]

I això és el que volíem demostrar. ♠

Evi 8, porisma. [**Segon teorema de l'altura d'un triangle rectangle.**] D'això se'n deriva fàcilment que *la perpendicular* [*que cau del vèrtex*] *de l'angle recte a la base, l'altura del triangle rectangle sobre la hipotenusa, és* [*el segment*] *mitjana proporcional de les dues parts en les quals divideix la base.*

I això és el que volíem demostrar.[904] ♠

EVI 9. *Volem delimitar una part concreta d'un segment donat per endavant.*

Sigui AB un segment.

Volem determinar-ne una part.

Suposem que hem prescrit la sostracció d'una tercera part.

[*Construcció.*] Tirem un segment AC, amb un extrem a [el punt] A, [P 1]

que determini un angle arbitrari amb el segment AB.

I considerem un punt D arbitrari de [el segment] AC.

Ara tirem [els segments] DE i EC iguals a [el segment]AD. [EI 2 i 3] ♣

[*Demostració.*] Unim BC. [P 1]

Pel punt D tirem un segment DF paral·lel a BC. [EI 31]

Aleshores, atès que FD s'ha traçat paral·lelament al [costat] BC [, que és un dels costats] del triangle $\triangle ABC$, resulta que, per la proporcionalitat [dels costats], CD és a DA com BF [és] a FA. [EVI 2]

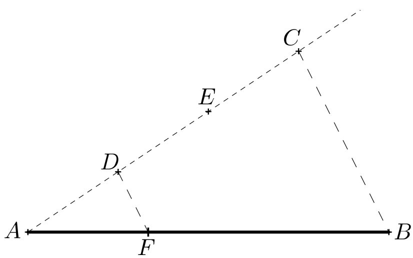


FIGURA EVI 9

I [el segment] CD [és] el doble de [el segment] DA.

En conseqüència, [el segment] BF també [és] el doble de [el segment] FA

i, de retruc, [el segment] BA [és] el triple de [el segment] AF.

En definitiva, hem determinat la tercera part, AF, del segment AB.

I això és el que volíem demostrar.[905] ♠

904. Heus ací l'existència del costat d'un quadrat que quadra un rectangle donat per endavant, amb l'ús de la teoria de la proporció d'Èudox. Vegeu EII 14.

905. Un porisma. És possible dividir un segment donat en n parts iguals.

EVI 10. *En un segment donat sense cap tall, hi determinem parts semblants a les d'un segment dividit en parts.*

[*Construcció.*] Siguin AB un segment sense parts
i AC un [segment] dividit pels punts D i E,
col·locats de manera que formin un angle arbitrari [$\widehat{BAC}$].

Unim CB. [P 1]

Pels punts D i E, tirem els segments DF i EG paral·lels a [el segment] BC. [EI 31] ♣

[*Demostració.*] A més, pel punt D, [tirem el segment] DHK paral·lel a [el segment] AB. [EI 31]

Aleshores, [les figures obtingudes] $\square FH$ i $\square HB$ són [dos] paral·lelograms.

D'això en resulta que [els segments] DH i FG, i [els segments] HK i GB són iguals [, respectivament]. [EI 34]

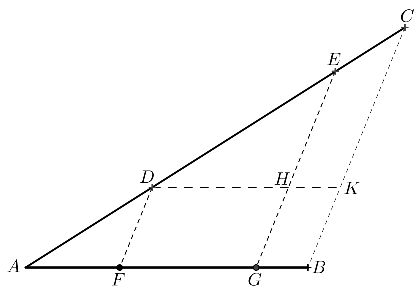


FIGURA EVI 10

Aleshores, atès que hem dibuixat el segment HE paral·lel a un dels costats —[el costat] KC— del triangle $\triangle DKC$,
[per Tales,][906] CE és a ED com KH [és] a HD. [EVI 2]

Però [els segments] KH i HD són iguals a [els segments] BG i GF, respectivament.

En conseqüència, CE és a ED com BG [és] a GF. [NC 1 i EV 7 i 11]

Novament, com que hem dibuixat [el segment] FD paral·lel a un dels costats del triangle $\triangle AGE$, el EG,
[per Tales,][907] ED és a DA com GF [és] a FA. [EVI 2]

Però també hem vist que CE [és] a ED com BG [és] a GF.

En definitiva, CE és a ED com BG [és] a GF,
i ED [és] a DA com GF [és] a FA.

906. És a dir, pel teorema de Tales [EVI 2]. El text grec diu: «per proporcionalitat» —ἀνάλογον.

907. Vegeu la nota 906.

Així doncs, hem dividit el segment AB en parts proporcionals a les [parts donades] del segment AC.

I això és el que volíem demostrar. ♠

Evi 11. [**Existència de la tercera proporcional.**] *Volem determinar un [segment] tercera proporcional de dos [segments] donats per endavant.*

Siguin BA i AC [dos segments] donats.

Els col·loquem de manera que formin un angle arbitrari.

Volem determinar la tercera proporcional dels [segments] BA i AC.

[*Construcció.*] Prolonguem [els segments BA i AC] fins als punts D i E, respectivament, [P 2]

i agafem [el segment] BD igual a AC. [Ei 3]

Unim BC. [P 1]

Seguidament, pel punt D, tirem [un segment] DE paral·lel [al segment BC]. [Ei 31] ♣

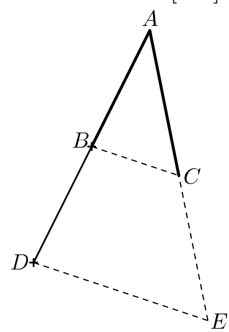


Figura Evi 11

[*Demostració.*] Atès que, d'acord amb el que hem construït,

[el segment] BC és paral·lel a un dels costats, el [segment] DE, del triangle $\triangle\, ADE$,

resulta que [, per Tales,][908] AB és a BD com AC [és] a CE, [Evi 2]

i [el segment] BD [és] igual a la part [AC].

En definitiva, hem construït la tercera proporcional entre [els dos segments] AB i AC. [Nc 1 i Ev 7 i 11]

I això és el que volíem demostrar. ♠

Evi 12. [**Existència de la quarta proporcional.**] *Volem determinar la quarta proporcional de tres segments donats per endavant.*

Siguin A, B i C tres segments donats.

Volem determinar [el segment que és] la quarta proporcional d'aquests segments.

[*Construcció.*] Considerem dues semirectes[909] DE i DF que formin un angle arbitrari $\widehat{EDF}$.

908. Vegeu la nota 906 (pàgina 316).

909. Si agafem semirectes, la demostració —la figura ideal— val en ge-

Tirem [els segments] DG, GE i DH iguals a [els segments] A, B i C [, respectivament]. [Ei 3]

Unim GH. [P 1]

Pel punt F, fem-hi [el segment] paral·lel EF. [Ei 31] ♣

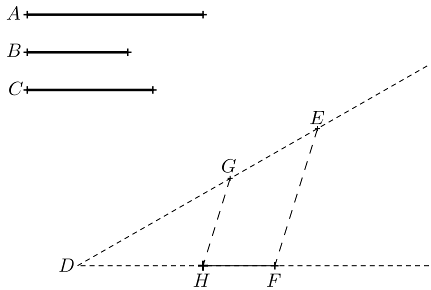


Figura Evi 12

[*Demostració.*] Aleshores, com que GH és paral·lel al costat EF del triangle $\triangle DEF$,

resulta que DG és a GE com DH [és] a HF. [Evi 2]

I, a més, DG, GE i DH són iguals a A, B i C [, respectivament].

Per tant, A és a B com C és a HF. [Nc 1 i Ev 7 i 11]

Així doncs, hem determinat [el segment] HF, que és la quarta proporcional de [els segments] A, B i C.

I això és el que volíem demostrar. ♠

Evi 13. [**Existència de la mitjana proporcional.**] *Volem determinar un segment que sigui la mitjana proporcional de dos segments donats per endavant.*[910]

Siguin AB i BC dos segments.

Volem trobar el segment que és la mitjana proporcional d'aquests segments.

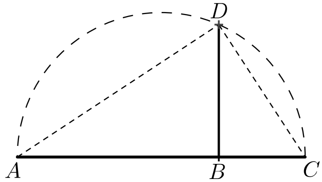


Figura Evi 13

[*Construcció.*] Col·loquem [els segments AB i BC] l'un al costat de l'altre. [Ei 13 i 14]

Tirem el semicercle $\frown ADC$ de diàmetre AC. [Di 10 i P 3]

I, pel punt B, el segment BD perpendicular al [segment] AC. [Ei 11] ♣

[*Demostració.*] Unim AD i DC. [P 1]

Com que (l'angle) $\widehat{ADC}$ és [un angle] en un semicercle, és un angle recte, [Eiii 31]

neral. Però no cal. Podem recórrer a la condició que imposen les proposicions Ei 13 i Ei 14.

910. Vegeu Evi 8, porisma.

i, al triangle rectangle $\triangle ADC$, el [segment] DB és perpendicular a la base AC;

resulta que DB és la mitjana proporcional de les parts AB i BC de la base. [Evi 8, porisma]

I això és el que volíem demostrar. ♠

Evi 14. a) *En paral·lelograms equiangles i equivalents,*[911] *els costats dels angles iguals són inversament proporcionals.* b) *Els paral·lelograms equiangles que tenen els costats dels angles iguals inversament proporcionals són equivalents.*

a) Siguin $\varparallelogram AB$ i $\varparallelogram BC$ [dos] paral·lelograms equivalents i equiangles que tenen iguals els angles [al vèrtex] B.

Col·loquem [els costats] DB i BE en una mateixa semirecta, [l'extrem B comú]. [Ei 13]

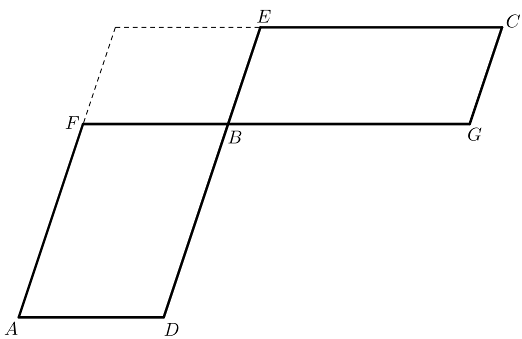


Figura Evi 14

Aleshores, [els costats] FB i BG estan també alineats. [Ei 14][912]

Afirmo que els costats de [els paral·lelograms] $\varparallelogram AB$ i $\varparallelogram BC$ que formen angles iguals són inversament proporcionals.

O sigui, DB és a BE com GB [és] a BF. [P 2 i 5]

[*Demostració*.] Completem [el paral·lelogram] $\varparallelogram FE$.[913]

Els paral·lelograms $\varparallelogram AB$, $\varparallelogram BC$ són equivalents i [, per construcció,] $\varparallelogram FE$ [és] també [un paral·lelogram].

911. Són paral·lelograms amb la mateixa superfície, però no són necessàriament superposables. Hi ha autors que diuen «iguals» entenent que tenen la «mateixa àrea». Vegeu el penúltim paràgraf de la pàgina 23.

912. Vegeu Vitrac (1994), p. 157, nota 59.

913. Prolonguem els segments CE i AF de la banda dels punts E i F. Per P 5, necessàriament es tallen. Només cal considerar el segment secant que passa pels punts E i F. Aquesta construcció es fonamenta en el fet que són dos paral·lelograms equiangles. Vegeu el problema 50 (pàgina 67).

Per tant, el [paral·lelogram] $\varparallelogram AB$ és a [el paral·lelogram] $\varparallelogram FE$ com [el paral·lelogram] $\varparallelogram BC$ [és] a [el paral·lelogram] $\varparallelogram FE$. [Ev 7]

I, com a paral·lelograms, $\varparallelogram AB$ [és] a $\varparallelogram FE$ com DB [és] a BE, [Evi 1]

i $\varparallelogram BC$ [és] a $\varparallelogram FE$ com GB [és] a BF, respectivament. [Evi 1]

Així doncs, DB [és] a BE com GB [és] a BF. [Evi 1]

En definitiva, tenim que els costats dels paral·lelograms $\varparallelogram AB$ i $\varparallelogram BC$, que formen els angles [respectius iguals], són inversament proporcionals. ♠

b) Ara suposem que DB és a BE com GB [és] a BF.

Afirmo que els paral·lelograms [equiangles] $\varparallelogram AB$ i $\varparallelogram BC$ són equivalents.[914]

[*Demostració.*] Atès que DB és a BE com GB [és] a BF,
que DB [és] a BE i GB [és] a BF com el paral·lelogram $\varparallelogram AB$ [és] al paral·lelogram $\varparallelogram FE$, [Evi 1]
i com el paral·lelogram $\varparallelogram BC$ [és] al paral·lelogram $\varparallelogram FE$, [Evi 1]
resulta que, com a [paral·lelograms],
el $\varparallelogram AB$ [és] a $\varparallelogram FE$ com $\varparallelogram BC$ [és] a $\varparallelogram FE$. [Ev 11]

Per tant, els paral·lelograms $\varparallelogram AB$ i $\varparallelogram BC$ són equivalents. [Ev 9] ♠

I això és el que volíem demostrar. ♠

Evi 15. a) *En triangles equivalents amb un angle igual, els costats que formen els angles iguals són inversament proporcionals.* b) *Els triangles amb un angle igual i els costats respectius que el formen inversament proporcionals són equivalents.*

a) Siguin $\triangle ABC$ i $\triangle ADE$ dos triangles iguals amb un dels angles [de l'un] igual a un angle [de l'altre],
en concret, $\widehat{BAC}$ [igual] a $\widehat{DAE}$.

Afirmo que, als triangles $\triangle ABC$ i $\triangle ADE$, els costats que formen els angles iguals són inversament proporcionals,
en concret, CA és a AD com EA [és] a AB.

[*Demostració.*] Alineem CA amb AD [amb l'extrem A comú]. [Ei 13]

Aleshores, EA i AB també estan alineats. [Ei 14]

914. Amb la hipòtesi que són equiangles.

Unim BD. [P 1]

Com a triangles, $\triangle\, CAB$ és a $\triangle\, BAD$ com $\triangle\, EAD$ [és] a $\triangle\, BAD$, atès que els triangles $\triangle\, ABC$ i $\triangle\, ADE$ són equivalents,
i $\triangle\, BAD$ [és] un altre [triangle]. [Ev 7]

Però el [triangle] $\triangle\, CAB$ [és] al [triangle] $\triangle\, BAD$ i el [triangle] $\triangle\, EAD$ [és] al [triangle] $\triangle\, BAD$
com CA [és] a AD i EA [és] a AB [, respectivament]. [Evi 1]

Aleshores, CA [és] a AD com EA [és] a AB. [Ev 11]

En definitiva, als triangles [equivalents] $\triangle\, ABC$ i $\triangle\, ADE$,
els costats que formen angles iguals [són] inversament proporcionals,
és a dir, EA és a AB com CA és a AD. ♠

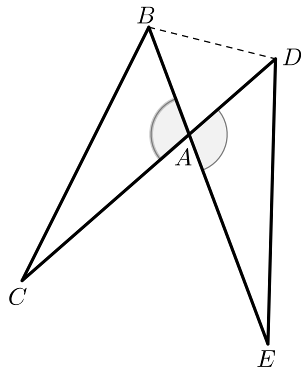


FIGURA EVI 15

b) Ara suposem que els costats dels triangles $\triangle\, ABC$ i $\triangle\, ADE$, que formen els angles iguals $\widehat{BAC}$ i $\widehat{DAE}$, són inversament proporcionals,
[en concret,] que CA és a AD com EA [és] a AB.

Afirmo que els triangles $\triangle\, ABC$ i $\triangle\, ADE$ són equivalents.

Com abans, unim BD. [P 1]

Aleshores, atès que CA és a AD com EA [és] a AB
i que CA [és] a AD i EA [és] a AB
com el triangle $\triangle\, ABC$ [és] al $\triangle\, BAD$ i el triangle $\triangle\, EAD$ al $\triangle\, BAD$, respectivament, [Evi 1]
resulta que [els dos triangles] $\triangle\, ABC$ i $\triangle\, EAD$ tenen la mateixa raó amb el triangle $\triangle\, BAD$. [Ev 7, iterat]

En definitiva, els [dos triangles] $\triangle\, ABC$ i $\triangle\, EAD$ són equivalents. ♠ [Ev 9]

I això és el que volíem demostrar. ♠[915]

EVI 16. a) *Si quatre segments són proporcionals, el rectangle que formen els dos (segments) extrems és equivalent al rectangle que formen*

915. Vegeu el problema 51 (pàgina 67).

els dos (segments) mitjans. b) *Si el rectangle de costats dos (segments) extrems és igual al rectangle de costats dos (segments) mitjans, els [quatre] segments són proporcionals.*[916]

a) Siguin AB, CD, E i F quatre magnituds proporcionals, [en concret,] AB [és] a CD com E [és] a F.

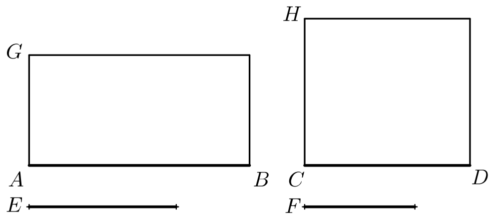


FIGURA EVI 16

Afirmo que el rectangle de costats AB i F és igual al rectangle format per CD i E.

[*Demostració*.] Portem els segments AG i CH als punts A i C perpendicularment als segments AB i CD [, respectivament]. [EI 3 i 11]

[Els segments] AG i CH s'han construït iguals a F i E [, respectivament]. [EI 3]

Per tant, podem determinar els paral·lelograms $\varparallelogram BG$ i $\varparallelogram DH$.[917]

I, com que AB és a CD com E [és] a F,
i E i F [són] iguals a CH i AG [, respectivament,]
resulta que AB és a CD com CH [és] a AG.[918]

Aleshores, als paral·lelograms $\varparallelogram BG$ i $\varparallelogram DH$,
els costats que formen angles iguals són inversament proporcionals.

I els paral·lelograms equiangles amb els costats d'angles iguals inversament proporcionals són equivalents. [EVI 14]

Així doncs, els paral·lelograms $\varparallelogram BG$ i $\varparallelogram DH$ són equivalents.

Però els paral·lelograms $\varparallelogram BG$ i $\varparallelogram DH$ són els [rectangles] de [costats] AB i F, i CD i E, respectivament,

---

916. De fet, és un porisma d'EVI 14. Diu: «Els rectangles que tenen la mateixa superfície tenen les bases inversament proporcionals a les altures, i recíprocament.» A més, si acceptem que l'àrea d'un rectangle és $AB \times AH$, queda establert que $\frac{AB}{CD} = \frac{E}{F}$ si, i només si, $AB \times F = CD \times E$.

917. Cal construir rectangles. Euclides no explica mai com es construeix un paral·lelogram, ni un rectangle de costats donats; però, en canvi, explica com podem fer un paral·lelogram que sigui equivalent a un triangle donat sobre un segment donat i amb un angle donat [EI 44], i també com podem fer un quadrat de costat donat [EI 46].

918. Un cop s'ha aplicat adequadament EV 7 i 11, s'usa P 1.

i AG i E [són] iguals a F i CH, respectivament.

En definitiva, els rectangles [de costats] AB i F, i CD i E són equivalents. ♠

b) Suposem ara que els rectangles [de costats] AB i F, i CD i E són equivalents.

Afirmo que els quatre segments són proporcionals,
[és a dir,] AB [és] a CD com E [és] a F.

[*Demostració.*] Amb la mateixa construcció,
atès que els [rectangles de costats] AB i F, i CD i E són equivalents,
que $\square\, BG$ és el [rectangle] de [costats] AB i F, i F és igual a AG,
i que $\square\, DH$ [és] el [rectangle] de [costats] CD i E, i E [és] igual a CH,
resulta que [el rectangle] $\square\, BG$ és equivalent a [el rectangle] $\square\, DH$.

I, a més, són equiangles.

Però en paral·lelograms equivalents i equiangles,
els costats d'angles iguals són inversament proporcionals. [EVI 14]

En conseqüència, AB és a CD com CH [és] a AG,
CH [és] igual a E, i AG a F.

En definitiva, AB és a CD com E [és] a F.

I això és el que volíem demostrar. ♠

EVI 17. a) *Si tres segments són proporcionals, el rectangle format pels dos extrems és equivalent al quadrat del [terme] mitjà.* b) *Si el rectangle format pels dos [termes] extrems és equivalent al quadrat del [terme] mitjà, els tres segments són proporcionals.*[919]

Siguin A, B i C tres segments proporcionals,
[en concret,] A [és] a B com B [és] a C.

Afirmo que el rectangle [de costats] A i C és equivalent al quadrat [de costat] B.

a) [*Demostració.*] Agafem D igual a B. [EI 3]

Com que A és a B com B [és] a C, i B [és] igual a D,
A és a B com D [és] a C. [Nc 1 i EV 7 i 11]

919. És un cas particular d'EVI 16 i, de retruc, n'és un porisma.

I, si quatre segments són proporcionals,
els [rectangles] de costats els dos segments extrems i els dos mitjans són equivalents. [Evi 16]

És a dir, els [rectangles de costats] A i C, i B i D són equivalents, però el [rectangle] de [costats] B i D és el [quadrat] de [costat] B,
ja que B [és] igual a D.

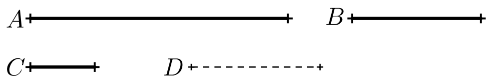


Figura Evi 17

D'això en resulta que el rectangle de costats A i C és equivalent al quadrat [de costat] B. [Nc 1] ♠

b) Ara suposem que el rectangle [de costats] A i C és equivalent al quadrat de costat B.

Afirmo que A és a B com B [és] a C.

[*Demostració*.] Amb la mateixa construcció,
el rectangle [de costats] A i C és equivalent al quadrat [de costat] B.
Però el quadrat [de costat] B és el rectangle [de costats] B i D,
ja que B [és] igual a D.
I, per tant, els rectangles [de costats] A i C, i B i D són equivalents.
Ara bé, el [rectangle] de [costats] els dos extrems és equivalent al rectangle de costats [els dos termes] mitjans.
Per tant, els quatre segments són proporcionals, [Evi 16]
és a dir, A és a B com D [és] a C, i B [és] igual a D.
En definitiva, A [és] a B com B [és] a C. ♠

I això és el que volíem demostrar. ♠

Evi 18. *Volem construir una figura rectilínia,*[920] *semblant a una figura rectilínia donada, col·locada en un segment donat per endavant de manera similar* [*a la donada*].

Siguin AB un segment donat per endavant i ⬠CE la figura rectilínia donada.

920. En els *Elements*, les figures rectilínies són figures poligonals convexes. Això planteja la qüestió: els resultats que s'estableixen per a figures poligonals convexes valen també per a figures poligonals còncaves? Vegeu el problema 52 (pàgina 67).

Volem construir una figura rectilínia semblant a ⬠CE, col·locada sobre el segment AB de manera similar [a ⬠CE].

[*Construcció i demostració.*[921]] Unim DF. [P 1]

Considerem l'angle $\widehat{GAB}$ igual a l'angle amb [el vèrtex] a C, i $\widehat{ABG}$ igual a (l'angle) $\widehat{CDF}$, construïts tots dos sobre el segment AB [amb els vèrtexs respectius] als punts A i B. [Ei 23]

Aleshores, l'altre [angle] $\widehat{CFD}$ és igual a l'altre [angle] $\widehat{AGB}$. [Ei 32]

Per tant, els triangles $\triangle\, FCD$ i $\triangle\, GAB$ són equiangles.

En conseqüència, FD és a GB com FC [és] a GA i CD a AB. [Ev 16 i Evi 4]

De bell nou, siguin [els angles] $\widehat{BGH}$ i $\widehat{GBH}$ iguals als angles $\widehat{DFE}$ i $\widehat{FDE}$ [, respectivament,] construïts sobre el segment BG [amb els vèrtexs respectius] als punts G i B. [Ei 23]

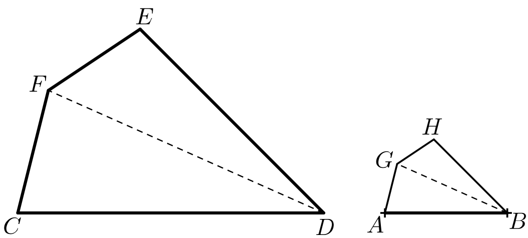


Figura Evi 18

Aleshores, l'angle [amb el vèrtex] al punt E és igual a l'angle [amb el vèrtex] al punt H. [Ei 32]

Per tant, els triangles $\triangle\, FDE$ i $\triangle\, GBH$ són equiangles.

En conseqüència, FD és a GB com FE [és] a GH i ED a HB. [Ev 16 i Evi 4]

Però també hem vist [que] FD [és] a GB com FC [és] a GA i CD a AB.

Aleshores, també FC [és] a AG com CD [és] a AB, FE a GH, i ED a HB. [Ev 11]

A més, [els angles] $\widehat{CFD}$ i $\widehat{DFE}$ són iguals a [els angles] $\widehat{AGB}$ i $\widehat{BGH}$.

Per tant, [els angles complets] $\widehat{CFE}$ i $\widehat{AGH}$ són iguals. [Nc 2]

Per les mateixes [raons], [els angles] $\widehat{CDE}$ i $\widehat{ABH}$ també són iguals,

921. La demostració procedeix per «triangulació», una tècnica molt fructífera. És aplicable a les figures poligonals còncaves? Vegeu l'ítem *b* del problema 52 (pàgina 67).

i els angles [amb els vèrtexs] a C i A, i a E i H també ho són [, respectivament].

D'això en resulta que [les figures] ⬠ AH i ⬠ CE són equiangles i tenen proporcionals els costats que formen angles iguals.

En definitiva, les figures rectilínies ⬠ AH i ⬠ CE són semblants.

[Dvi 1]

I això és el que volíem demostrar. ♣ ♠

Evi 19. *Els triangles semblants són entre si com el quadrat de la raó de semblança dels seus costats respectius.*[922]

Siguin $\triangle ABC$ i $\triangle DEF$ dos triangles semblants amb els angles [amb els vèrtexs als punts] B i E iguals.

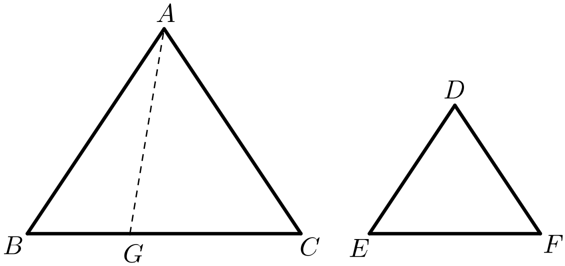


Figura Evi 19

[El costat] AB és [al costat] BC com [el costat] DE [és al costat] EF, de manera que BC correspon a EF. [Dv 11]

Afirmo que la raó dels triangles $\triangle ABC$ i $\triangle DEF$ és el quadrat de la raó que [té el costat] BC amb el [costat] EF.[923]

[*Demostració.*] Considerem [el segment] BG tercera proporcional de [els segments] BC i EF,

[és a dir,] BC és a EF com EF [és] a BG. [Evi 11]

Unim AG.[924] [P 1]

Aleshores, com que AB és a BC com DE [és] a EF,

922. Les àrees respectives dels triangles semblants són entre si com el quadrat de la raó de semblança dels costats respectius. Textualment: «doble» (διπλασίος λόγος) o «duplicada» (διπλασίων λόγος).

923. És a dir, la raó que el quadrat de costat BC té amb el quadrat de costat EF.

924. A la figura Evi 19, el punt G cau dins el segment BC, però això no és important i no altera en res la validesa de la demostració. Vegeu l'ítem *c* del problema 52 (pàgina 67).

alternando, AB és a DE com BC [és] a EF. [Ev 16]

Però BC [és] a EF com EF és a BG.

En conseqüència, AB [és] a DE com EF [és] a BG. [Ev 11]

D'això en resulta que els triangles $\triangle ABG$ i $\triangle DEF$ tenen inversament proporcionals els costats que formen angles iguals.

I, atès que tenen un [angle] igual a un [angle], precisament el de costats inversament proporcionals, tots dos triangles, $\triangle ABG$ i $\triangle DEF$, són equivalents. [Evi 15]

A més, BC [és] a EF com EF [és] a BG.

I, si tres segments són proporcionals, aleshores el primer i el tercer tenen una raó que és el quadrat de la raó que el primer té amb el segon. [Dv 9]

Així doncs, [els segments] BC i BG tenen una raó que és el quadrat de la que té [el segment] CB amb EF.

Però CB [és] a BG com el triangle $\triangle ABC$ [és] al triangle $\triangle ABG$. [Evi 1]

Per tant, els triangles $\triangle ABC$ i $\triangle ABG$ tenen una raó que és el quadrat de la raó que tenen [els costats] BC i EF. [Ev 11]

Però el triangle $\triangle ABG$ [és] equivalent al triangle $\triangle DEF$.

En definitiva, els triangles $\triangle ABC$ i $\triangle DEF$ també tenen una raó que és el quadrat de la raó que tenen els costats BC i EF. [Ev 7]

I això és el que volíem demostrar. ♠

Evi 19, porisma. *Si tres segments són proporcionals, el primer és al tercer com la figura [construïda] sobre el primer [és] a la figura semblant [construïda] d'una manera anàloga sobre el segon.*

És evident i no cal demostrar-ho. ♠

Evi 20. *Els polígons semblants* a) *es poden dividir en el mateix nombre de triangles semblants, i* b) *aquests triangles tenen la mateixa raó que els* [*polígons*] *complets. De retruc,* c) *un polígon manté amb* [*l'altre*] *polígon una raó que és el quadrat de la raó que mantenen els costats corresponents dels polígons semblants.*[925]

925. Aquesta proposició és, de fet, un element de la proposició Exii 2 i, pel seu caràcter d'element, la retrobem a Exii 1.

Siguin ⬠ $ABCDE$ i ⬠ $FGHKL$ [dos] polígons semblants de [costats] AB i FG.

Afirmo que *a*) els polígons ⬠ $ABCDE$ i ⬠ $FGHKL$ es poden dividir en el mateix nombre de triangles semblants,
b) aquests triangles mantenen [la proporció] amb els [polígons] complets,
i *c*) la raó de [els] polígons ⬠ $ABCDE$ i ⬠ $FGHKL$ és el quadrat de la raó de [el costat] AB amb [el costat] FG.

[*Demostració.*] *a*) Unim BE, EC, GL i LH. [P 1]

Atès que el polígon ⬠ $ABCDE$ és semblant al polígon ⬠ $FGHKL$, els angles $\widehat{BAE}$ i $\widehat{GFL}$ són iguals, i BA és a AE com GF [és] a FL. [Dvi 1]

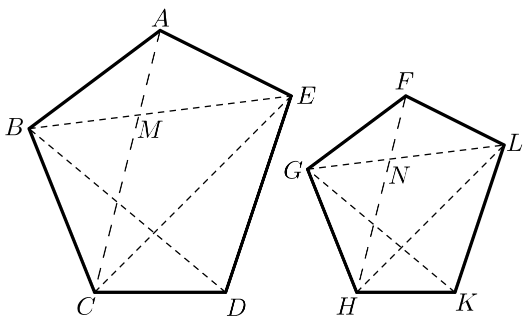


Figura Evi 20

En conseqüència, com que [els triangles] $\triangle\, ABE$ i $\triangle\, FGL$ tenen un angle igual a un angle,
i tenen proporcionals els costats que formen els angles iguals,
els [dos] triangles $\triangle\, ABE$ i $\triangle\, FGL$ són equiangles. [Evi 6]

I, de retruc, també són semblants. [Evi 4 i Dvi 1]

Així, els angles $\widehat{ABE}$ i $\widehat{FGL}$ són iguals,
i, atesa la semblança dels polígons, [els angles] complets $\widehat{ABC}$ i $\widehat{FGH}$ també ho són.

Per tant, els angles diferència $\widehat{EBC}$ i $\widehat{LGH}$ també són iguals. [Nc 3 i Ei 32]

I, atesa la semblança dels triangles $\triangle\, ABE$ i $\triangle\, FGL$, EB és a BA com LG [és] a GF,
i atesa la semblança dels polígons, AB és a BC com FG [és] a GH.

Aleshores, *ex æquali*, EB és a BC com LG [és] a GH [Ev 22]
i, per tant, els costats que formen els angles iguals, $\widehat{EBC}$ i $\widehat{LGH}$, també són proporcionals.

Així doncs, els triangles $\triangle\, EBC$ i $\triangle\, LGH$ són equiangles [E VI 6]
i, per tant, són semblants. [E V 22 i D VI 1]

Per les mateixes [raons], els triangles $\triangle\, ECD$ i $\triangle\, LHK$ són semblants.

En definitiva, hem dividit els polígons semblants $\pentagon\, ABCDE$ i $\pentagon\, FGHKL$ en el mateix nombre de triangles semblants. $\spadesuit$

b) Afirmo que [els triangles] són proporcionals als [polígons] totals.

[*Demostració.*] Això és fàcil de demostrar, ja que els triangles són proporcionals:
[els triangles] $\triangle\, ABE, \triangle\, EBC$ i $\triangle\, ECD$ són els antecedents,
i [els triangles] corresponents $\triangle\, FGL, \triangle\, LGH$ i $\triangle\, LHK$ els consegüents. [E V 12] $\spadesuit$

c) [I, finalment,] afirmo que els polígons $\pentagon\, ABCDE$ i $\pentagon\, FGHKL$ tenen una raó que és el quadrat de la raó dels costats corresponents, és a dir, la raó de AB amb FG.

[*Demostració.*] Unim AC i FH.

I, com que els angles $\widehat{ABC}$ i $\widehat{FGH}$ són iguals i [el segment] AB és a [el segment] BC com [el segment] FG [és] a [el segment] GH,
d'acord amb la semblança dels polígons,
resulta que els triangles $\triangle\, ABC$ i $\triangle\, FGH$ són equiangles. [E VI 6]

Aleshores, els angles $\widehat{BAC}$ i $\widehat{BCA}$, i $\widehat{GFH}$ i $\widehat{GHF}$ són iguals, respectivament.

I, com que els angles $\widehat{BAM}$ i $\widehat{GFN}$ són iguals
i [els angles] $\widehat{ABM}$ i $\widehat{FGN}$ també [, com hem vist abans],
resulta que [els angles] diferència, $\widehat{AMB}$ i $\widehat{FNG}$, també ho són.
[Nc 3 i E I 32]

Així doncs, els triangles $\triangle\, ABM$ i $\triangle\, FGN$ són equiangles.

I, d'una manera anàloga, podem veure que els triangles $\triangle\, BMC$ i $\triangle\, GHN$ també són equiangles.

Aleshores, AM és a MB com FN [és] a NG,
i BM [és] a MC com GN [és] a NH. [E VI 4]

Per tant, *ex æquali*, AM [és] a MC com FN [és] a NH. [E V 22]

Però AM [és] a MC com [el triangle] $\triangle\, ABM$ és a [el triangle] $\triangle\, MBC$
i el [triangle] $\triangle\, AME$ a [el triangle] $\triangle\, EMC$.

Ara bé, tots dos triangles són com les seves bases. [Evi 1]

I [sabem que] una de les primeres [magnituds] és a una de les segones com la suma de totes les primeres és a la suma de totes les segones. [Ev 12]

Aleshores, el triangle $\triangle AMB$ [és] a [el triangle] $\triangle BMC$ com [el triangle] $\triangle ABE$ [és] a [el triangle] $\triangle CBE$.

Però [el triangle] $\triangle AMB$ [és] a [el triangle] $\triangle BMC$ com AM [és] a MC.

Aleshores, AM [és] a MC com el triangle $\triangle ABE$ [és] al triangle $\triangle EBC$.

Per les mateixes [raons], FN [és] a NH com el triangle $\triangle FGL$ [és] al triangle $\triangle GLH$.

I AM és a MC com FN [és] a NH.

Per tant, el triangle $\triangle ABE$ [és] al triangle $\triangle BEC$ com el triangle $\triangle FGL$ [és] al triangle $\triangle GLH$. [Ev 11]

I, *alternando*, el triangle $\triangle ABE$ [és] al triangle $\triangle FGL$
com el triangle $\triangle BEC$ [és] al triangle $\triangle GLH$. [Ev 16]

Si unim BD i GK, [P 1]
podem veure que el triangle $\triangle BEC$ [és] al triangle $\triangle LGH$ com el triangle $\triangle ECD$ [és] al triangle $\triangle LHK$.

D'això en resulta que el triangle $\triangle ABE$ és al triangle $\triangle FGL$ com [el triangle] $\triangle EBC$ [és] al [triangle] $\triangle LGH$ i també com [el triangle] $\triangle ECD$ és a [el triangle] $\triangle LHK$.

Per tant, una de les primeres [magnituds] [és] a una de les segones com [la suma de] totes [les primeres magnituds] ho és a [la suma de] totes les segones. [Ev 12]

Aleshores, el triangle $\triangle ABE$ és al triangle $\triangle FGL$ com el polígon ⬠ $ABCDE$ [és] al polígon ⬠ $FGHKL$.

Però el triangle $\triangle ABE$ té amb el triangle $\triangle FGL$ una raó
que és igual al quadrat de la raó dels costats corresponents AB i FG, ja que els triangles semblants tenen una raó que és el quadrat de la raó dels costats corresponents. [Evi 19]

Per tant, el polígon ⬠ $ABCDE$ té amb el polígon ⬠ $FGHKL$
una raó que és el quadrat de la raó que el costat AB té amb el [costat] corresponent FG. [Ev 12] ♠

I això és el que volíem demostrar. ♠[926]

Evi 20, porisma. *D'una manera semblant, podem veure també que la raó de quadrilàters [semblants] és el quadrat de la raó dels costats corresponents. I hem vist que això també es compleix en el cas dels triangles. Per tant, en general, figures rectilínies semblants tenen, una amb l'altra, una raó que és el quadrat de la raó dels costats corresponents.*

I això és el que volíem demostrar. ♠

Evi 21. *Les figures rectilínies semblants a una mateixa figura rectilínia són semblants entre si.*[927]

Considerem les figures rectilínies ⬠A i ⬠B semblants a [la figura rectilínia] ⬠C.

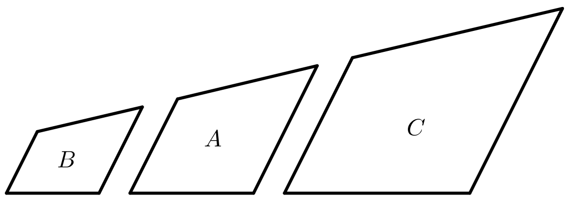


Figura Evi 21

Afirmo que ⬠A i ⬠B també són semblants.

[*Demostració.*] Atès que [el polígon] ⬠A és semblant al [polígon] ⬠C, [els polígons] ⬠A i ⬠C són equiangles i tenen proporcionals els costats que formen els angles iguals. [Dvi 1]

Anàlogament, atès que [els polígons] ⬠B i ⬠C són semblants, són equiangles
i tenen proporcionals els costats que formen els angles iguals. [Dvi 1]

Aleshores, [els polígons] ⬠A i ⬠B són equiangles amb [el polígon] ⬠C.

En conseqüència, els costats de [els polígons] ⬠A i ⬠B que formen angles iguals són proporcionals amb els costats corresponents de [el polígon] ⬠C, [Ev 11]
[és a dir, els polígons] ⬠A i ⬠B són equiangles [Nc 1]
i tenen proporcionals els costats que formen els angles iguals.

926. La demostració de l'ítem *c* és molt sofisticada. Vegeu l'ítem *e* del problema 52 (pàgina 67).

927. Aquesta proposició estableix la transitivitat de la semblança de les figures poligonals rectilínies.

D'això en resulta que ⬠A i ⬠B són semblants. [Dvi 1]
I això és el que volíem demostrar. ♠

Evi 22. *Siguin quatre segments proporcionals.* a) *Les figures rectilínies semblants, descrites d'una manera anàloga i* [*dibuixades*] *damunt* [*cadascun*]*, també són proporcionals.* b) *I, si les figures rectilínies semblants, descrites d'una manera anàloga i* [*dibuixades*] *damunt* [*cadascun*]*, són proporcionals, els segments també ho són.*

Siguin AB, CD, EF i GH quatre segments proporcionals,
[és a dir,] AB [és] a CD com EF [és] a GH.

Damunt els costats AB i CD dibuixem les figures rectilínies semblants disposades igualment ⬠KAB i ⬠LCD, respectivament. [Ev 18]

I, damunt els costats EF i GH, les figures rectilínies ⬠$'MF$ i ⬠$'NH$, respectivament.[928] [Ev 18]

a) Afirmo que ⬠KAB és a ⬠LCD com ⬠$'MF$ [és] a ⬠$'NH$.

[*Demostració.*] Considerem [els segments] O i P,
tercera proporcional dels (segments) AB i CD, i EF i GH, respectivament. [Evi 11]

Com que AB és a CD com EF [és] a GH,
i CD [és] a O com GH [és] a P,
ex æquali, AB és a O com EF [és] a P. [Ev 22]

Però AB [és] a O com ⬠KAB [és] a ⬠LCD,
[Ev 19 i 20, porismes]
i EF [és] a P com ⬠$'MF$ [és] a ⬠$'NH$.

Així doncs, ⬠KAB [és] a ⬠LCD com ⬠$'MF$ [és] a ⬠$'NH$.
[Ev 11] ♠

Suposem ara que ⬠$'MF$ [és] a ⬠$'NH$ com ⬠KAB [és] a ⬠LCD.

b) Afirmo que AB és a CD com EF [és] a GH.

[*Demostració.*] Perquè si la raó de AB amb CD no és igual a la raó de EF amb GH,[929]
aleshores AB és a CD com EF [és] a QR. [Evi 12]

---

928. Segons la proposició Evi 20, la forma concreta de les figures no importa sempre que siguin polígons rectilinis. La figura, doncs, és ideal. I les figures són semblants dues a dues; però no totes quatre, necessàriament.

929. Hipòtesi de l'absurd.

Considerem la figura rectilínia $\pentagon' SR$, semblant a [una de les figures] $\pentagon' MF$ o $\pentagon' NH$ i igualment disposada damunt [el segment] QR. [Evi 18 i 21]

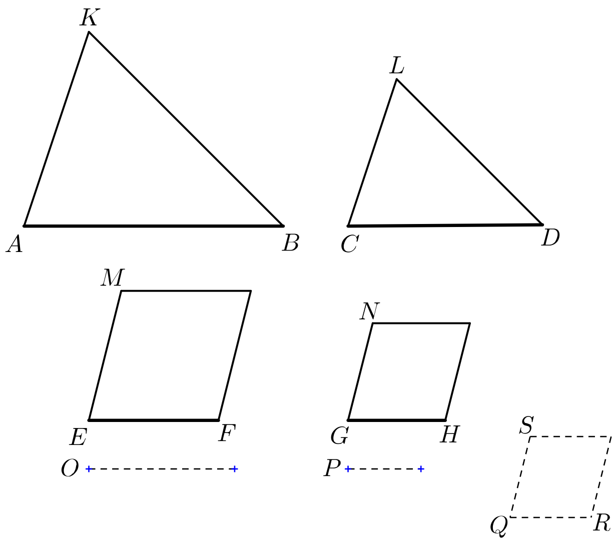


Figura Evi 22

Aleshores, atès que AB és a CD com EF [és] a QR,
atès que s'han descrit les figures rectilínies $\pentagon KAB$ i $\pentagon LCD$ damunt els segments AB i CD i atès que, anàlogament, s'han descrit les [figures rectilínies] $\pentagon' MF$ i $\pentagon' SR$ damunt [els segments] EF i QR [, respectivament],
resulta que $\pentagon KAB$ és a $\pentagon LCD$ com $\pentagon' MF$ [és] a $\pentagon' SR$. [ítem *a*]

Però hem suposat que $\pentagon KAB$ [és] a $\pentagon LCD$ com $\pentagon' MF$ [és] a $\pentagon' NH$
i, per tant, $\pentagon' MF$ [és] a $\pentagon' SR$ com $\pentagon' MF$ [és] a $\pentagon' NH$. [Ev 11]

Així doncs, [la figura] $\pentagon' MF$ té la mateixa raó amb [la figura] $\pentagon' NH$ i $\pentagon' SR$,
i, en conseqüència, [les figures semblants] $\pentagon' NH$ i $\pentagon' SR$ són equivalents
i, alhora, semblants i disposades de manera anàloga.

D'això en resulta que GH [és] igual a QR.[930]

En definitiva, com que AB és a CD com EF [és] a QR, i QR [és] igual a GH,
tenim que AB és a CD com EF [és] a GH. [Nc 1 i Ev 7 i 11] ♠
I això és el que volíem demostrar. ♠

Evi 23. [*Les àrees*] *de paral·lelograms equiangles tenen una raó* [*que és*] *igual a la raó composta* —ἄλληλα λόγος— [*de les raons*] *dels costats.*
Siguin ▱AC i ▱CF [dos] paral·lelograms equiangles que tenen l'angle $\widehat{BCD}$ igual a (l'angle) $\widehat{ECG}$.

Afirmo que la raó dels paral·lelograms ▱AC i ▱CF és la [raó] composta de [les raons] dels costats [respectius].

[*Demostració*]. Considerem [els segments] BC i DC com a prolongacions de [els segments] CG i CE [, respectivament]. [Ei 13 i 14]

Completem el paral·lelogram ▱DG.[931]

Sigui K un segment [donat].

[Determinem] L i M de manera que BC [sigui] a CG com K [és] a L, i DC a CE com L [és] a M.[932] [Evi 12]

Aleshores, la raó de K a L i de L a M és la mateixa que la dels costats BC i CG, i DC i CE [, respectivament].

Ara bé, la raó de K amb M és la raó composta de les raons de K amb L i de L amb M.

En conseqüència, la raó de K amb M també és la raó composta [de les raons] dels costats [dels paral·lelograms].

---

930. Atès que es tracta de figures rectilínies semblants, podríem aplicar-hi Evi 20. Però, atenció!, hi intervé la composició de raons, cosa difícil de justificar. Si ho entenem com que es tracta del rectangle dels antecedents i dels consegüents, podríem considerar que tenim dos quadrats equivalents. I això implicaria que els costats són iguals. Això no obstant, Euclides ho omet i pressuposa simplement que «si dues figures semblants són equivalents, els costats corresponents també són iguals». Vegeu la nota 496 (pàgina 148).

931. Les prolongacions dels segments HD i HG es tallen al punt H [P 5]. Unim HD i HG [P 1]. Com podem constatar fàcilment, obtenim un paral·lelogram. Vegeu el problema 50 (pàgina 67).

932. El text grec diu: καὶ γεγονέτω ὡς μὲν ἡ $B\Gamma$ πρός τὴν ΓH, οὕτως ἡ K πρὸς τὴν Λ, de traducció difícil.

I, atès que BC és a CG com el paral·lelogram ▱AC [és] al paral·lelogram ▱CH, [Evi 1]
però BC [és] a CG com K [és] a L,
resulta que K [és] a L com [el paral·lelogram] ▱AC [és al paral·lelogram] ▱CH. [Ev 11]

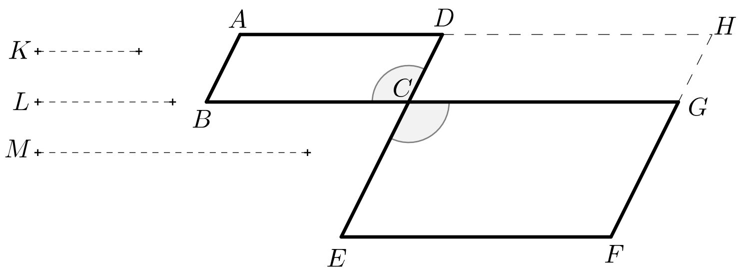


Figura Evi 23

De bell nou, DC [és] a CE com el paral·lelogram ▱CH [és] al paral·lelogram ▱CF. [Evi 1]

Però DC [és] a CE com L [és] a M;
per tant, L [és] a M com [el paral·lelogram] ▱CH [és al paral·lelogram] ▱CF. [Ev 11]

En conseqüència, com que hem vist que K [és] a L com el paral·lelogram ▱AC [és] al paral·lelogram ▱CH
i L [és] a M com [el] paral·lelogram ▱CH [és] al paral·lelogram ▱CF,
ex æquali, resulta que K és a M com [el paral·lelogram] ▱AC [és] al paral·lelogram ▱CF [Ev 22]
i K té amb M la raó composta de [les raons] dels costats [dels paral·lelograms].

En definitiva, [els paral·lelograms] ▱AC, ▱CF també tenen la raó composta de [les raons] dels seus costats. [Ev 11]
I això és el que volíem demostrar. ♠

Evi 24. *En tot paral·lelogram, els paral·lelograms sobre la diagonal són* a) *semblants al total, i* b) *semblants entre si.*

Considerem un paral·lelogram ▱$ABCD$, la seva diagonal AC
i els paral·lelograms ▱EG i ▱HK sobre [la diagonal] AC.

Afirmo que els paral·lelograms $\varparallelogram EG$ i $\varparallelogram HK$ són: *a*) semblants a [el paral·lelogram] $\varparallelogram ABCD$, i *b*) semblants entre si.

[*Demostració*.] *a*) Com que [el segment] EF és paral·lel al costat BC del triangle $\triangle ABC$,

BE és a EA com CF [és] a FA. [EVI 2]

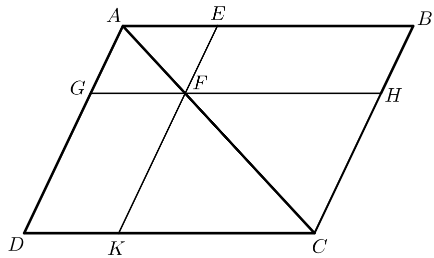


FIGURA EVI 24

De bell nou, atès que [el segment] FG és paral·lel al [costat] CD del triangle $\triangle ACD$,

CF és a FA com DG [és] a GA. [EVI 2]

Però hem establert que CF [és] a FA com BE és a EA.

Aleshores, BE [és] a EA com DG [és] a GA. [EV 11]

Ara, *componendo*, BA [és] a AE com DA [és] a AG, [EV 18]

i, *alternando*, BA [és] a AD com EA [és] a AG. [EV 16]

D'això en resulta que, als paral·lelograms $\varparallelogram ABCD$ i $\varparallelogram EG$, els costats que formen l'angle comú $\widehat{BAD}$ són proporcionals,

i GF és paral·lel a DC.

Per tant, els angles $\widehat{AFG}$, $\widehat{DCA}$ són iguals. [EI 29]

I l'angle $\widehat{DAC}$ [és] comú als [dos] triangles $\triangle ADC$ i $\triangle AGF$.

En conseqüència, els triangles $\triangle ADC$ i $\triangle AGF$ són equiangles. [EI 32]

Per les mateixes raons, els triangles $\triangle ACB$ i $\triangle AFE$ també ho són.

En definitiva, el paral·lelogram total $\varparallelogram ABCD$ i el paral·lelogram $\varparallelogram EG$ són equiangles.

Aleshores, AD [és] a DC com AG [és] a GF,

DC [és] a CA com GF [és] a FA,

AC [és] a CB com AF [és] a FE

i, a més, CB [és] a BA com FE [és] a EA. [EVI 4]

Però, com que hem vist que DC és a CA com GF [és] a FA

i AC [és] a CB com AF [és] a FE,

ex æquali, resulta que DC és a CB com GF [és] a FE. [EV 22]

D'això en resulta que, als paral·lelograms ▱ $ABCD$ i ▱ EG, els costats que formen angles iguals són proporcionals.

Aleshores, els paral·lelograms ▱ $ABCD$ i ▱ EG són semblants. [Dvi 1]

I, per les mateixes [raons], els paral·lelograms ▱ $ABCD$ i ▱ KH són semblants.

En definitiva, els paral·lelograms ▱ EG i ▱ HK són semblants al [paral·lelogram] ▱ $ABCD$. ♠

b) [Les figures rectilínies] semblants a la mateixa figura rectilínia són també semblants entre si. [Evi 21]

I, per tant, el paral·lelogram ▱ EG és semblant al paral·lelogram ▱ HK. ♠

I això és el que volíem demostrar. ♠

Evi 25. *Volem construir una [figura rectilínia] semblant a una figura rectilínia donada i equivalent a una altra figura rectilínia donada.*

Siguin ⬠ ABC i ⬠$'D$ dues figures rectilínies donades.

Volem construir una [figura rectilínia] semblant a [la primera de les figures donades] i equivalent a [la segona].

És a dir, volem construir una [figura rectilínia] semblant a [la figura] ⬠ ABC i equivalent a [la figura] ⬠$'D$.

[*Demostració.*] Apliquem el paral·lelogram ▱ BE, equivalent a la figura ⬠ ABC, damunt el [segment] BC,[933] [Ei 44]
i el paral·lelogram ▱ CM, equivalent a [la figura] ⬠$'D$,
damunt [el segment] CE, amb l'angle $\widehat{FCE}$ igual a (l'angle) $\widehat{CBL}$. [Ei 45]

Ara, col·loquem BC al costat de CF, i LE al de EM. [Ei 14]

Considerem la mitjana proporcional GH dels (segments) BC i CF. [Evi 13]

933. El text diu: «Apliquem el paral·lelogram ▱ BE equivalent al triangle △ ABC damunt el segment BE» (Παραβεβλήσϑω γὰρ παρὰ μὲν τὴν *ΒΓ* τῷ *ΑΒΓ* τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ *ΒΕ*). Però tots els resultats utilitzats s'han establert per a figures rectilínies —polígons— arbitràries. Per tant, no cal sotmetre's ni al triangle ni al quadrilàter de la figura. El resultat és més general que el de la figura, que, com sempre, és simplement orientativa.

La figura ⬠ KGH sobre [el segment] GH és semblant a [la figura] ⬠ ABC i està col·locada d'una manera anàloga. [Evi 18]

Com que BC és a GH com GH [és] a CF
i sabem que si tres segments són proporcionals,
el primer és al tercer com la figura [descrita] damunt el primer [és] a la semblant col·locada d'una manera anàloga damunt el segon,
[Evi 19 i 20, porismes]
BC és a CF com [la figura] ⬠ ABC [és] a [la figura] ⬠ KGH.

Però, alhora, BC [és] a CF com el paral·lelogram ▱ BE [és] al paral·lelogram ▱ EF. [Evi 1]

En conseqüència, la figura ⬠ ABC [és] a la figura ⬠ KGH com el paral·lelogram ▱ BE [és] al paral·lelogram ▱ EF. [Ev 11]

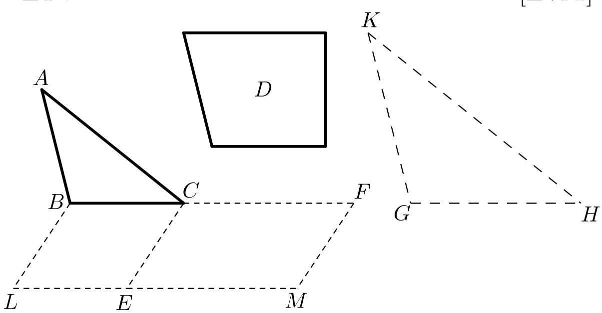


Figura Evi 25

I, *alternando*, la figura ⬠ ABC [és] al paral·lelogram ▱ BE com la figura ⬠ KGH [és] al paral·lelogram ▱ EF, [Ev 16]
i la figura ⬠ ABC [és] equivalent al paral·lelogram ▱ BE.

Per tant, la figura ⬠ KGH també [és] equivalent al paral·lelogram ▱ EF.

Però el paral·lelogram ▱ BE és equivalent a [el polígon] ⬠ $'D$.
[Nc 1]

Aleshores, [les figures] ⬠ KGH i ⬠ $'D$ també són equivalents i, per tant, [els polígons] ⬠ KGH i ⬠ ABC són semblants.

I això és el que volíem demostrar. ♠

Evi 26. *Si d'un paral·lelogram en sostraiem un [altre] de semblant, col·locat d'una manera semblant i amb un angle comú, aleshores [el paral·lelogram sostret] està col·locat de manera que comparteix amb l'inicial [un segment de] la diagonal.*

És a dir, del paral·lelogram ▱$ABCD$ en sostraiem [el paral·lelogram] ▱AF, semblant i col·locat d'una manera anàloga al [paral·lelogram] ▱$ABCD$, de manera que comparteixin l'angle $\widehat{DAB}$.

Afirmo que els [paral·lelograms] ▱$ABCD$ i ▱AF comparteixen la diagonal.[934]

[*Demostració.*] Si no és així,[935]

la diagonal [del paral·lelogram ▱$ABCD$] és AHC.[936]

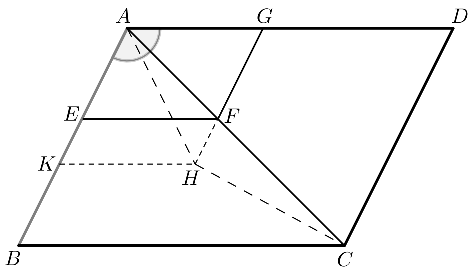


FIGURA EVI 26

Prolonguem GF fins al punt H.

Pel punt H, tirem el [segment HK] paral·lel a AD o BC. [EI 30 i 31]

Aleshores, atès que [els paral·lelograms] ▱$ABCD$ i ▱KG comparteixen la diagonal,

DA és a AB com GA [és] a AK. [EVI 24]

I, atenent la semblança [dels paral·lelograms] ▱$ABCD$ i ▱EG, DA [és] a AB com GA [és] a AE. [DVI 1]

I d'això en resulta que GA també [és] a AK com GA [és] a AE. [EV 11]

En definitiva, GA té la mateixa raó amb AK i AE;
per tant, AE i AK són iguals. [EV 9]

Però, aleshores, el paral·lelogram petit i el gran són iguals. I això és impossible.

En definitiva, quan suposem que els paral·lelograms ▱$ABCD$ i ▱AF no comparteixen la diagonal, resulta que la comparteixen.

I això és el que volíem demostrar. ♠

934. El text diu que la diagonal de (el paral·lelogram) ▱AF és un segment —una part— de (el segment) AF de la diagonal AC del paral·lelogram ▱$ABCD$. Ho abreugem dient que els dos paral·lelograms «comparteixen» la diagonal (sobreentenent que les dues diagonals tenen un extrem comú).

935. Hipòtesi de l'absurd.

936. El paral·lelogram ▱AH i la diagonal AHC són «figures ideals».

Evi 27. *D'entre tots els paral·lelograms aplicats a un segment [donat] per defecte d'un paral·lelogram semblant al [paral·lelogram] construït sobre la meitat [del segment donat] i col·locat de manera anàloga, el més gran de tots és el [paral·lelogram] semblant al defecte aplicat sobre la meitat [del segment donat].*[937]

Siguin AB un segment [donat] i C el punt que el dimidia. [Ei 10]

Considerem el paral·lelogram ▱AD aplicat al segment AB per defecte de figures paral·lelogramàtiques semblants al [paral·lelogram] ▱DB, que es troba aplicat, per exemple, a la meitat CB del segment AB.[938]

Afirmo que d'entre els paral·lelograms aplicats al segment AB per defecte de figures paral·lelogramàtiques semblants al paral·lelogram ▱DB, situades de manera anàloga, el més gran de tots és el paral·lelogram ▱AD.

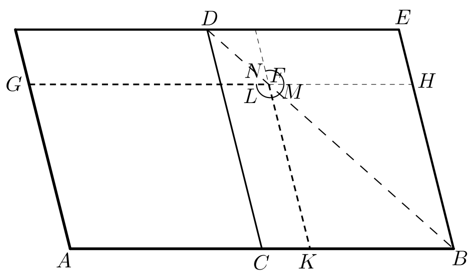


Figura Evi 27

[*Demostració.*] Sigui ▱AF el paral·lelogram aplicat per defecte de la figura paral·lelogramàtica ▱FB, semblant a ▱DB i col·locada d'una manera anàloga al segment AB.

Afirmo que ▱AD és més gran que ▱AF.

---

937. Euclides proporciona un diorisma per a la proposició següent, Evi 28, que, expressat en el llenguatge algèbric, imposa que el «discriminant» de l'equació de segon grau sigui positiu. Aquesta proposició inicia les proposicions relatives a l'«aplicació d'àrees», que generalitzen les que Euclides ja havia establert al llibre ii. Vegeu la proposició esmentada i la nota 939 (pàgina 341).

938. Atesa la complexitat de l'enunciat, val la pena explicar-ho una mica. Disposem d'un segment AB i considerem una de les dues meitats, CB. Sobre aquesta meitat hi ha un paral·lelogram ▱DB. Ara, sobre el segment AB, hi apliquem per defecte —és a dir, sobre el segment deficient AK— un paral·lelogram ▱AF de manera que el defecte —el paral·lelogram ▱FB que completa el paral·lelogram ▱AF per tal que junts facin un paral·lelogram sobre AB— sigui semblant i estigui col·locat d'una manera anàloga al paral·lelogram ▱DB.

Efectivament, el paral·lelogram $\varparallelogram DB$ és semblant al paral·lelogram $\varparallelogram FB$.

Per tant, tots dos comparteixen la mateixa diagonal. [Evi 26]

Considerem ara la diagonal [comuna] DB i completem la resta de la figura.

En conseqüència, atès que el [paral·lelogram complement] $\varparallelogram CF$ és equivalent al [paral·lelogram complement] $\varparallelogram FE$ [Ei 43]
i [el paral·lelogram] $\varparallelogram FB$ és comú,
els [paral·lelograms] complets $\varparallelogram CH$ i $\varparallelogram KE$ són equivalents. [Nc 2]

Però els [paral·lelograms] $\varparallelogram CH$ i $\varparallelogram CG$ són equivalents,
ja que els (segments) AC i CB ho són. [Ei 36]

Per tant, [els paral·lelograms] $\varparallelogram GC$ i $\varparallelogram EK$ també són equivalents. [Nc 1]

Afegim el [paral·lelogram] $\varparallelogram CF$ a tots dos [paral·lelograms].

Aleshores, el [paral·lelogram] complet $\varparallelogram AF$ és igual al gnòmon ⌝ LMN. [Nc 2]

En definitiva, el paral·lelogram $\varparallelogram DB$, que és el mateix que el paral·lelogram $\varparallelogram AD$, és més gran que el paral·lelogram $\varparallelogram AF$.

I això és el que volíem demostrar. ♠

Evi 28. *En un segment donat, volem aplicar un paral·lelogram equivalent a una figura rectilínia donada i deficient d'un altre paral·lelogram semblant a un [paral·lelogram] donat. És necessari que la figura rectilínia donada [, a la qual serà equivalent el paral·lelogram aplicat,] no sigui més gran que el [paral·lelogram] descrit damunt la meitat [del segment] i que sigui semblant al defecte del deficient.*[939]

939. Aquí apareix el diorisma que, de fet, s'establia en la proposició anterior.

En llenguatge algèbric, si fem $a)$ $AB := a, AS := x$, $b)$ que h designi l'altura del paral·lelogram $\varparallelogram TS$, que equival a la figura $\mathfrak{C}$, d'àrea C, i $c)$ que b, c siguin la base i l'altura de $\varparallelogram RS$, de costat $SB = a - x$, resulta que: $C = x\,h$ i $\frac{a-x}{h} = \frac{b}{c}$. Si eliminem h, obtenim l'equació $(a-x)\,x = \frac{b\,C}{c}$. Es tracta, doncs, d'una equació de segon grau que només té solucions (reals) si $\varparallelogram PR \leq \frac{a^2\,c}{4\,b} = \frac{1}{2} a\,h'$, on $h' = \frac{a\,c}{2\,b}$ és l'altura del paral·lelogram $\varparallelogram AG$ semblant al paral·lelogram $\varparallelogram \mathfrak{D}$, construït sobre la meitat de AB. Aquest és el diorisma expressat algèbricament.

Siguin C la figura rectilínia donada i AB el segment al qual s'aplica el [paral·lelogram] equivalent [a la figura C], que no supera el [paral·lelogram] descrit damunt [el segment] meitat de AB, semblant al dèficit.[940]

I sigui ▱D el [paral·lelogram] al qual volem que sigui semblant el dèficit.

Volem aplicar un paral·lelogram, equivalent a la figura rectilínia donada C, damunt el segment AB amb deficiència d'una figura paral·lelogramàtica semblant a [el paral·lelogram] ▱D.

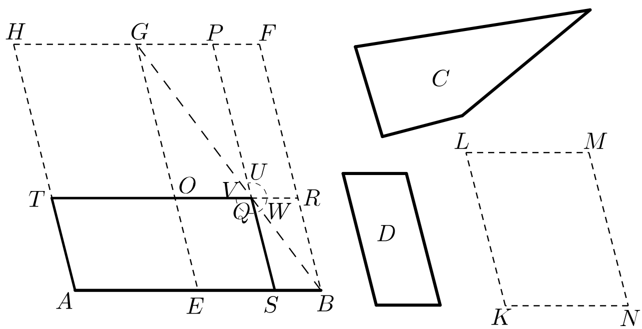


Figura Evi 28

[*Construcció i demostració.*] Siguin E el punt que divideix AB per la meitat [Ei 10]
i ▱$EBFG$ el [paral·lelogram] semblant al [paral·lelogram] ▱D, col·locat d'una manera anàloga damunt el segment EB. [Evi 18]

Completem el paral·lelogram ▱AG.

a)[941] Aleshores, si ▱AG equival a C, hem aconseguit el que volíem perquè hem construït, per defecte, la figura paral·lelogramàtica ▱GB damunt [el segment] AB semblant a [el paral·lelogram] ▱D. ♣ ♠

b) Si no [es dóna la igualtat i el paral·lelogram] ▱HE és més gran que C,

com que ▱HE [és] equivalent a [el paral·lelogram] ▱GB, [Ei 36]
[el paral·lelogram] ▱GB també [és] més gran que C.

940. Aquesta limitació ve imposada per Evi 27.

941. La demostració procedeix per casos.

Considerem, doncs, el [paral·lelogram] ▱$KLMN$ semblant a D, col·locat d'una manera anàloga
i equivalent a l'excés amb el qual [el paral·lelogram] ▱GB excedeix C. [Evi 25]

Però [el paral·lelogram] ▱GB [és] semblant a D.

En conseqüència, [el paral·lelogram] ▱KM també ho és a [el paral·lelogram] ▱GB. [Evi 21]

D'això en resulta que [el segment] KL correspon al [segment] GE i LM al GF.

I, atès que [el paral·lelogram] ▱GB equival a [la figura] C juntament amb [el paral·lelogram] ▱KM,
resulta que [el paral·lelogram] ▱GB és més gran que [el paral·lelogram] ▱KM.[942]

Aleshores, [els segments] GE i GF també són més grans que [els segments] KL i LM, respectivament.[943]

Fem [els intervals] GO i GP iguals als (segments) KL i LM, respectivament. [Ei 3]

Completem el paral·lelogram ▱$OGPQ$.[944]

Aleshores, [el paral·lelogram ▱GQ] és equivalent[945] i semblant a [el paral·lelogram] ▱KM
[però el paral·lelogram ▱KM és semblant al paral·lelogram ▱GB].

D'això en resulta que el paral·lelogram ▱GQ també és semblant al paral·lelogram ▱GB. [Evi 21]

Aleshores, els [paral·lelograms] ▱GQ i ▱GB comparteixen diagonal. [Evi 26]

Sigui, doncs, GQB la diagonal comuna.

Per tant, queda descrit [el romanent de la figura].

---

942. Implícitament, Euclides admet que, donades dues magnituds $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C} > \mathfrak{A}$ si, i només si, existeix una magnitud $\mathfrak{B}$ de manera que $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$.

943. Euclides ho afirma sense cap justificació però és un porisma d'Evi 22. Vegeu Heath (1925), volum ii, p. 242 i següents. Vegeu l'ítem f_4, *ii* del problema 52 (pàgina 67).

944. Vegeu la nota 564 (pàgina 166).

945. Observeu que, en aquest cas, són iguals, és a dir, congruents. Vegeu la nota 496 (pàgina 148).

En conseqüència, atès que [el paral·lelogram] ▱BG és equivalent a C i ▱KM [junts],
[la part] dels quals ▱GQ és equivalent a KM,
resulta que el gnòmon restant ⌝UWV és equivalent al residu C. [Nc 3]

I, com que [el complement] ▱PR és equivalent [al complement] ▱OS, [Ei 43]
afegim [el paral·lelogram] ▱QB a tots dos.

D'això en resulten els [paral·lelograms] totals, ▱PB i ▱OB, equivalents [entre si]. [Nc 2]

Però [el paral·lelogram] ▱OB és equivalent [al paral·lelogram] ▱TE, atès que [els costats] AE i EB són iguals. [Ei 36]

Per tant, [el paral·lelogram] ▱TE també és equivalent [al paral·lelogram] ▱PB.

Afegim [el paral·lelogram] ▱OS a tots dos.

El [paral·lelogram] total ▱TS és equivalent al gnòmon ⌝VWU. [Nc 2]

Però hem vist que el gnòmon ⌝VWU és equivalent a C. [Nc 1]

Per tant, [el paral·lelogram] ▱TS també ho és a [la figura] C.

En definitiva, el paral·lelogram ▱ST és equivalent a la figura rectilínia donada C, que hem aplicat damunt el segment AB
amb el defecte de la figura paral·lelogramàtica ▱QB,
que és semblant a D [en la mesura que el paral·lelogram] ▱QB és semblant a [el paral·lelogram] ▱GQ. [Evi 21 i 24] ♣ ♠

I això és el que volíem demostrar. ♠

Evi 29. *Volem aplicar, sobre un segment donat, un paral·lelogram equivalent a una figura rectilínia donada,* [*de manera que al paral·lelogram*] *l'excedeixi*[946] *una figura paral·lelogramàtica semblant a un* [*paral·lelogram*] *donat.*

Siguin AB el segment donat,
C la figura rectilínia donada a la qual volem que sigui equivalent el [paral·lelogram] aplicat sobre [el segment] AB
i ▱D el [paral·lelogram] al qual volem que sigui semblant l'excés.

946. Es tracta de l'aplicació d'àrees «per excés».

Volem aplicar, damunt [el segment donat] AB, un paral·lelogram equivalent a la figura rectilínia C,
amb l'excés d'una figura paral·lelogramàtica semblant a [el paral·lelogram] ▱D.

[*Construcció i demostració.*] Siguin E el punt mitjà del segment AB [EI 10]
i ▱BF el paral·lelogram semblant i col·locat d'una manera anàloga a [el paral·lelogram] ▱D construït damunt EB. [EVI 18]

Construïm el [paral·lelogram] ▱GH semblant, col·locat d'una manera anàloga a D i equivalent a ▱BF i C [junts]. [EVI 25]

Els segments KH i KG corresponen a FL i a FE [, respectivament].

Ara bé, atès que el [paral·lelogram] ▱GH és més gran que el [paral·lelogram] ▱FB,
[el segment] KH també ho és més que [el segment] FL, i [el segment] KG més que [el segment] FE.[947]

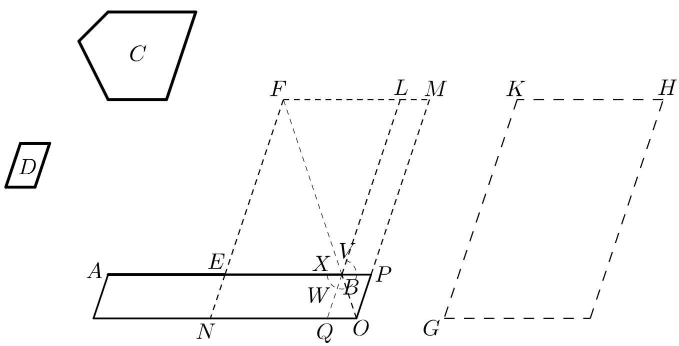


Figura EVI 29

Prolonguem FL i FE de manera que FLM i FEN siguin iguals a KH i KG [, respectivament]. [P 2 i EI 3]

I completem el [paral·lelogram] ▱MN.

Aleshores, [els paral·lelograms] ▱MN i ▱GH són equivalents i semblants.

Però [el paral·lelogram] ▱GH és semblant a [el paral·lelogram] ▱MN i, per tant, [al paral·lelogram] ▱EL. [EVI 21]

947. Vegeu la nota 944 (pàgina 343).

En conseqüència, [els paral·lelograms] ▱EL i ▱MN comparteixen la diagonal. [Evi 26]

Sigui FO la diagonal comuna.

Considerem [el que manca a] la figura.

Com que el [paral·lelogram] ▱GH és equivalent a [el paral·lelogram] ▱EL i la [figura] C [junts],
però els [paral·lelograms] ▱GH i ▱MN són equivalents,
resulta que ▱MN també és equivalent a ▱EL i C [junts]. [Nc 1]

Sostraiem de tots dos [el paral·lelogram] ▱EL.

Aleshores, el gnòmon que queda, ⌝XWV, és equivalent a [la figura] C. [Nc 3]

I, atès que AE és igual a EB,
els [paral·lelograms] ▱AN i ▱NB també ho són, [Ei 36]
és a dir, són equivalents al [paral·lelogram] ▱LP. [Ei 43]

Afegim el [paral·lelogram] ▱EO a ▱AN i ▱LP.

Aleshores, el [paral·lelogram] complet ▱AO és equivalent al gnòmon ⌝VWX. [Nc 2]

Però el gnòmon ⌝VWX és equivalent a la [figura] C.

Aleshores, el [paral·lelogram] ▱AO també és equivalent a la [figura] C. [Nc 1]

En conseqüència, el paral·lelogram ▱AO, que és equivalent a la figura rectilínia C, s'ha aplicat sobre el segment AB amb l'excés de la figura paral·lelogramàtica ▱QP, semblant a [el paral·lelogram] ▱D,
ja que [els paral·lelograms] ▱PQ i ▱EL són semblants.
[Evi 21 i 24]

I això és el que volíem demostrar.[948] ♣ ♠

Evi 30. *Volem dividir un segment donat en mitjana i extrema raó.*[949]

---

948. Amb les notacions de la nota 939 (pàgina 341), si fem $BP := x$, obtenim: $(a+x)\,h = C$, $\frac{x}{h} = \frac{b}{c}$. I l'eliminació de h de totes dues equacions dóna: $(a+x)\,x = \frac{b\,C}{c}$. Així, s'obté una equació quadràtica l'arrel positiva de la qual s'aconsegueix per aplicació d'àrees «per excés».

949. Compareu aquesta proposició amb la que hi ha a Eii 11. I també amb l'explicació d'índole historicometodològica que hem fet a l'ítem *b* de la pàgina 8 i a la pàgina 34.

Sigui AB el segment donat.

Volem [determinar] el punt [E] que el divideix en mitjana i extrema raó.

[*Construcció.*] Considerem el quadrat $\square BC$ descrit sobre [el segment] AB, [EI 46]

i el paral·lelogram ▱ CD equivalent a $\square BC$, aplicat a AC amb l'excés ▱ AD semblant a [el quadrat] $\square BC$. [EVI 29] ♣

[*Demostració.*] Atès que $\square BC$ és un quadrat, $\square AD$ també ho és.

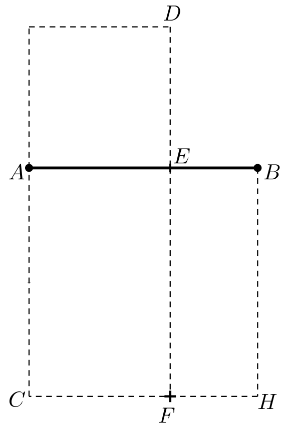


FIGURA EVI 30

Com que $\square BC$ és equivalent a ▭ CD,

si sostraiem [el rectangle] ▭ CE de tots dos,

el [rectangle] ▭ BF i el quadrat $\square AD$ romanents són equivalents. [Nc 3]

Però també són equiangles.

Aleshores, els costats BF i AD que determinen els angles iguals són inversament proporcionals. [EVI 14]

Així doncs, FE és a ED com AE [és] a EB,

però FE i ED [són] iguals a AB i AE [, respectivament].

Per tant, BA és a AE com AE [és] a EB, [Nc 1 i EV 7 i 11]

i AB [és] més gran que AE.

D'això en resulta que AE també [és] més gran que EB. [EV 14]

En definitiva, hem dividit el segment AB en mitjana i extrema raó pel punt E,

i AE n'és la part més gran.

I això és el que volíem demostrar. ♠

EVI 31. *En els triangles rectangles, la figura [feta] damunt la hipotenusa equival a la [suma de les figures] semblants col·locades d'una manera anàloga damunt els catets.*[950]

950. Procle atribueix aquesta proposició a Euclides, mentre que afirma que l'EI 47 l'establí l'escola pitagòrica, encara que no sigui atribuïble a Pitàgores mateix.

Sigui $\triangle ABC$ un triangle rectangle amb l'angle recte $\widehat{BAC}$.

Afirmo que la figura [construïda] damunt BC és equivalent a la [suma de les figures] semblants construïdes damunt BA i AC d'una manera anàloga.

[*Demostració.*] Tirem la perpendicular AD. [Ei 12]

Aleshores, com que, al triangle rectangle $\triangle ABC$,
el [segment] AD és la perpendicular a la base BC pel vèrtex A,
els triangles $\triangle ABD$ i $\triangle ADC$ determinats per la perpendicular són semblants al [triangle] $\triangle ABC$, i entre si. [Evi 8]

I, com que [el triangle] $\triangle ABC$ és semblant a [el triangle] $\triangle ABD$,
CB és a BA com AB [és] a BD. [Dvi 1]

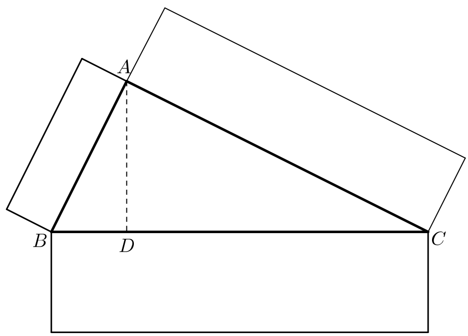


Figura Evi 31

I, atès que els tres segments són proporcionals, el primer és al tercer com la figura [construïda] damunt el primer és a la [figura] semblant col·locada anàlogament damunt el segon. [Evi 19 i 20, porismes]

Per tant, CB [és] a BD com la figura [construïda] damunt CB [és] a la [figura] semblant col·locada anàlogament damunt BA.

Per les mateixes raons, BC [és] a CD com la figura [construïda] damunt CB [és] a la [figura] semblant col·locada anàlogament damunt CA.

En conseqüència, BC també [és] a BD i DC [junts] com la figura [construïda] damunt BC [és] a la [suma de les figures] semblants col·locades anàlogament damunt BA i AC. [Ev 24]

Ara bé, BC és BD i DC [junts].

Així doncs, la figura [construïda] damunt BC també [és] igual a la suma de les [figures] semblants col·locades anàlogament damunt BA i AC. [Ev 24]

I això és el que volíem demostrar. ♠[951]

951. Compareu aquesta demostració amb la d'Hipòcrates de Quios.

Evi 32. *Si col·loquem dos triangles que tenen dos costats proporcionals de manera que els costats proporcionals siguin paral·lels i que comparteixin un vèrtex, aleshores l'altre costat [d'un triangle i de l'altre] es troba en un mateix segment.*[952]

Siguin $\triangle ABC$ i $\triangle DCE$ dos triangles que tenen els costats BA i AC proporcionals als dos costats DC i DE [, respectivament,]
és a dir, AB [és] a AC com DC [és] a DE,
i AB i AC són paral·lels [als costats respectius] DC i DE.

Afirmo que [els costats] BC i CE estan alineats.

[*Demostració.*] Com que AB és paral·lel a DC i el segment AC els travessa,
els angles alterns $\widehat{BAC}$ i $\widehat{ACD}$ són iguals entre si. [Ei 29]

Per la mateixa raó, [els angles] $\widehat{CDE}$ i $\widehat{ACD}$ són iguals.

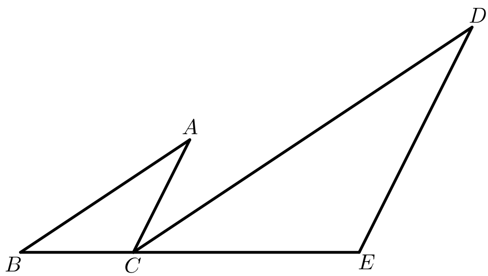


Figura Evi 32

Aleshores, atès que [els angles] $\widehat{BAC}$ i $\widehat{CDE}$ són iguals, [Nc 1]
[els dos triangles] $\triangle ABC$ i $\triangle DCE$ tenen els angles $\hat{A}$ i $\hat{D}$ iguals
i els costats respectius que els formen proporcionals,
[és a dir,] BA [és] a AC com CD [és] a DE.

Això fa que els triangles $\triangle ABC$ i $\triangle DCE$ siguin equiangles. [Ei 6]

Per tant, els angles $\widehat{ABC}$ i $\widehat{DCE}$ són iguals.

Però hem establert que [els angles] $\widehat{ACD}$ i $\widehat{BAC}$ també ho són.

Vegeu Pla (2016*c*), p. 246 i 491, i el problema 53 (pàgina 67).

952. Aquest enunciat és ambigu. Vegeu les figures del problema 54 (pàgina 68), però no podem evitar-lo perquè Euclides l'usa a Exiii 17, és a dir, és un «element». És un cas realment excepcional en el qual la figura valida els passos de la demostració.

Un enunciat més ajustat podria ser: «Considerem dos triangles que comparteixin un vèrtex però cap costat amb aquest vèrtex comú i que tinguin dos costats proporcionals. Suposem que els costats són proporcionals i estan col·locats de manera semblant. Aleshores, les bases —els altres costats— estan alineades.» Per a una explicació més àmplia, vegeu Heath (1925), volum ii, p. 271 i 272.

En conseqüència, l'angle [suma] $\widehat{ACE}$ és equivalent als dos [angles] $\widehat{ABC}$ i $\widehat{BAC}$. [Nc 2]

Afegim (l'angle) $\widehat{ACB}$ a cadascun.

Resulta que [els angles] $\widehat{ACE}$ i $\widehat{ACB}$ [junts] equivalen a [els angles] $\widehat{BAC}$, $\widehat{ACB}$ i $\widehat{CBA}$ [junts]. [Nc 2]

Els angles $\widehat{BAC}$, $\widehat{ABC}$ i $\widehat{ACB}$ [junts] fan dos [angles] rectes. [Ei 32]

En definitiva, tenim un segment AC en l'extrem C del qual incideixen dos segments BC i CE, un a cada costat [del punt C], de manera que els angles adjacents $\widehat{ACE}$ i $\widehat{ACB}$ [junts] fan dos angles rectes.

D'això en resulta que el segment BC és una prolongació [del segment] CE. [Ei 14]

I això és el que volíem demostrar. ♠

Evi 33. *En cercles iguals,*[953] *els angles tenen la mateixa raó que l'arc que subtendeixen sempre que* a) *tinguin el vèrtex al centre* [*del cercle*] *o* b) *el tinguin en* [*un punt de*] *la circumferència.*[954]

Siguin $\bigcirc ABC$ i $\bigcirc DEF$ [dos] cercles,

$\widehat{BGC}$ i $\widehat{EHF}$ [dos] angles amb els vèrtexs als centres G i H [dels cercles respectius],

i $\widehat{BAC}$ i $\widehat{EDF}$ [dos angles amb el vèrtex] a les circumferències [corresponents].

Afirmo que l'arc $\overset{\frown}{BC}$ és a l'arc $\overset{\frown}{EF}$ com l'angle $\widehat{BGC}$ [és] a l'angle $\widehat{EHF}$ i com l'angle $\widehat{BAC}$ és a (l'angle) $\widehat{EDF}$.

[*Demostració.*][955]

a) Considerem un nombre arbitrari d'arcs [de circumferència] $\overset{\frown}{CK}$ i

---

953. Amb el mateix radi però amb centres diferents.

954. De fet, és una generalització d'Eiii 27.

En el cas dels sectors amb el vèrtex al centre, aquesta propietat és un porisma que usa Zenòdor al seu opuscle *Sobre les figures isoperimètriques* (Περὶ ισομετρων σχημάτων), que recull Teó d'Alexandria als comentaris de la *Sintaxi* de Ptolemeu.

En l'obra d'Euclides no trobem la proporcionalitat de les àrees dels segments ni dels sectors, que, com vàrem veure a Pla (2016*c*), p. 246, usa Hipòcrates de Quios en la quadratura de les lúnules. Solament hi trobem la proporcionalitat de l'àrea del cercle complet respecte del quadrat de la diagonal [Exii 2]. Vegeu Pla (2018*a*).

955. Ho demostra per aplicació directa de la definició Dv 5.

$\overset{\frown}{KL}$ iguals a l'arc $\overset{\frown}{BC}$, i un nombre arbitrari d'arcs $\overset{\frown}{FM}$ i $\overset{\frown}{MN}$ [iguals] a [l'arc] $\overset{\frown}{EF}$.

Unim GK, GL, HM i HN. [P 1]

D'això en resulta que, atès que [els arcs] $\overset{\frown}{BC}, \overset{\frown}{CK}$ i $\overset{\frown}{KL}$ són iguals entre si,
els angles $\widehat{BGC}, \widehat{CGK}$ i $\widehat{KGL}$ també ho són. [EIII 27]

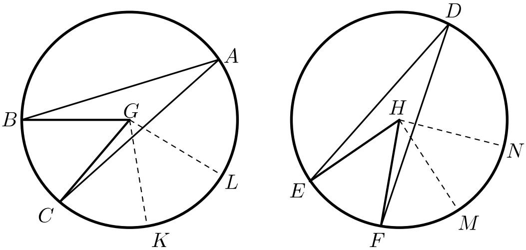


FIGURA EVI 33

Així doncs, l'arc $\overset{\frown}{BL}$ és [divisible] per l'arc $\overset{\frown}{BC}$ el mateix nombre de vegades que l'angle $\widehat{BGL}$ ho és per l'angle $\widehat{BGC}$.

Per les mateixes [raons], l'arc $\overset{\frown}{NE}$ és [divisible] per [l'arc] $\overset{\frown}{EF}$ tantes vegades com l'angle $\widehat{NHE}$ és [divisible] per (l'angle) $\widehat{EHF}$.

De tot això en resulta que si l'arc $\overset{\frown}{BL}$ és divisible per l'arc $\overset{\frown}{EN}$, aleshores l'angle $\widehat{BGL}$ també ho és per (l'angle) $\widehat{EHN}$. [EIII 27]

Si l'arc $\overset{\frown}{BL}$ és més gran que l'arc $\overset{\frown}{EN}$, aleshores l'angle $\widehat{BGL}$ també ho és més que (l'angle) $\widehat{EHN}$.

I, si [$\overset{\frown}{BL}$ és] més petit [que $\overset{\frown}{EN}$], aleshores [$\widehat{BGL}$] també ho és més [que l'angle $\widehat{EHN}$].

Disposem, doncs, de quatre magnituds, dos arcs, $\overset{\frown}{BC}$ i $\overset{\frown}{EF}$, i dos angles, $\widehat{BGC}$ i $\widehat{EHF}$.

S'ha pres el mateix múltiple de l'arc $\overset{\frown}{BC}$ i de l'angle $\widehat{BGC}$,
[en concret,] l'arc $\overset{\frown}{BL}$ i l'angle $\widehat{BGL}$;
i de l'arc $\overset{\frown}{EF}$ i de l'angle $\widehat{EHF}$, [en concret,] l'arc $\overset{\frown}{EN}$ i l'angle $\widehat{EHN}$.

I s'ha establert que si l'arc $\overset{\frown}{BL}$ és més gran, igual o més petit que l'arc $\overset{\frown}{EN}$,
aleshores l'angle $\widehat{BGL}$ també és més gran, igual o més petit que l'angle $\widehat{EHN}$ [, respectivament].

Per tant, l'arc $\overset{\frown}{BC}$ [és] a [l'arc] $\overset{\frown}{EF}$ com l'angle $\widehat{BGC}$ [és] a (l'angle) $\widehat{EHF}$. [Dv 5] ♠

b) Però l'angle $\widehat{BGC}$ [és] a (l'angle) $\widehat{EHF}$ com (l'angle) $\widehat{BAC}$ [és] a (l'angle) $\widehat{EDF}$, [Ev 15]
ja que el primer és el doble del segon [, respectivament]. [Eiii 20]

Aleshores, de la mateixa manera que l'arc $\overset{\frown}{BC}$ [és] a l'arc $\overset{\frown}{EF}$, l'angle $\widehat{BGC}$ [és] a (l'angle) $\widehat{EHF}$, i (l'angle) $\widehat{BAC}$ a (l'angle) $\widehat{EDF}$. [Ev 11] ♠

I això és el que volíem demostrar. ♠

Les figures del text

La figura 1.1 (pàgina 3) és de domini públic. Vegeu <https://ca.wikipedia.org/wiki/Euclides#/media/File:P._Oxy._I_29.jpg>.

La figura 1.2 (pàgina 5) mostra una pàgina, amb marges, de l'edició dels *Elements* feta per Erhard Ratdolt a Venècia l'any 1482. Té llicència Creative Commons Reconeixement - Compartir Igual (CC BY-SA). Vegeu <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Euclid's_Elements,_1482.jp>.

La figura A.1 (pàgina 73), *Euclides i l'arquitectura*, és un plafó de marbre del campanar de Giotto de Santa Maria del Fiore (Florència). Actualment es conserva al Museu dell'Opera del Duomo. És de domini públic. Vegeu <https://ca.wikipedia.org/wiki/Nino_Pisano#/media/File:Euclid_Pisano_OPA_Florence.jpg>.

Les altres figures que acompanyen el text explicatiu i les proposicions dels *Elements* són d'elaboració pròpia i han estat dissenyades amb GeoGebra.

Matemàtics i personatges citats

ADELARD DE BATH (Adelardus Bathensis) (Bath [Anglaterra], 1080 - Bath?, 1152), filòsof anglès del segle XII. És conegut per les traduccions al llatí d'obres àrabs d'astronomia, filosofia, matemàtiques i astrologia, i també d'antics textos grecs que, en la seva època, només existien en traduccions àrabs, en particular dels *Elements* d'Euclides a partir del text d'al-Ḥajjaj.

AGUSTÍ, Aureli (Aurelius Augustinus), més conegut com a Agustí d'Hipona (Tagaste [Numídia], 13 de novembre del 354 - Hipona, 28 d'agost del 430), una de les figures més importants del cristianisme, considerat com un dels pares de l'Església. La seva influència és enorme i ultrapassa l'àmbit de la teologia. És un dels pensadors fonamentals de la història occidental.

ANAXÀGORES DE CLAZÒMENES (Ἀναξαγόρας ὁ Κλαζομένιος) (Clazòmenes [Àsia Menor], ∼510 aC - Làmpsac [Àsia Menor], ∼428 aC), filòsof grec.

ANTEMI DE TRAL·LES (Ἀνθέμιος ὁ Τραλλιανός) (Tral·les [Lídia, Imperi bizantí], 474 - Constantinoble [Imperi bizantí], 533), arquitecte, matemàtic i professor notable.

APOL·LODOR EPICUR (Ἀπολλόδωρος ο Επικούρειος) (segle II aC), mestre de filosofia epicúria. És esmentat per Diògenes Laerci. Fou el mestre de Zenó de Sidó, que, vers el 84 aC, el succeí com a director de l'escola epicúria. Es suposa que hauria escrit 400 llibres però només se'n conserva el títol d'un, *Vida d'Epicuri.*

Apol·loni de Perge (Ἀπολλώνιος ὁ Περγαῖος) (Perge [Grècia], ∼262 aC - Perge [Grècia], ∼190 aC), matemàtic grec.

Aristarc de Samos (Ἀρίσταρχος ὁ Σάμιος) (Samos [Grècia], 310 aC - Samos [Grècia], 230 aC), matemàtic grec.

Aristeu de Crotona (Ἀρισταίος ο Πρεβύτερος), també conegut com a «Aristeu el Vell», matemàtic del segle IV aC.

Aristòtil (Ἀριστοτέλης) (Estagira [Grècia], 384 aC - Eubea [Grècia], 322 aC), un dels filòsofs grecs més notables. Fundà el Liceu (Λύκειον). Se'l considera un dels grans pensadors de la humanitat.

Arquimedes de Siracusa (Ἀρχιμήδης ο Συρακούσιος) (Siracusa [Itàlia], 287 aC - Siracusa, 212 aC), matemàtic grec.

Boeci (Anicius Manlius Severinus Boethius) (Roma [Itàlia], 480 - Pavia [Itàlia], 525), filòsof cristià del segle VI amb una gran influència i repercussió en l'edat mitjana.

Bolzano, Bernard Placidus Johann Nepomuk (Praga [República Txeca], 5 d'octubre del 1781 - Praga, 18 de desembre del 1848), matemàtic txec.

Borelli, Giovanni Alfonso (Nàpols [Itàlia], 28 de gener del 1608 - Roma [Itàlia], 31 de desembre del 1679), matemàtic italià.

Campanus de Novara, Giovanni (Novara [Piemont, Itàlia], ∼1220 - Viterbo [Laci, Itàlia], 13 de setembre del 1296), matemàtic italià.

Ciceró, Marc Tul·li (Arpinum [Itàlia], 106 aC - Formia [Itàlia], 43 aC), polític, filòsof, escriptor i orador de l'antiga Roma. Se'n coneix la vida gràcies a la biografia de Plutarc; a les seves abundants epístoles, que encara es conserven, i al zel dels humanistes dels segles XV i XVI, que varen copiar els rars manuscrits dels seus discursos i obres.

Clavius, Christoph (Bamberg [Baviera, Alemanya], 25 de març del 1538 - Roma [Itàlia], 2 de febrer del 1612), jesuïta alemany, matemàtic i astrònom, conegut amb el sobrenom d'«Euclides del segle XVI». Se'l considera el pare del calendari gregorià. Va confegir l'obra *Euclidis Elementorum libri XV. Accessit XVI de solidorum regularium comparatione. Omnes perspicuis demonstrationibus, accuratisque scholiis illustrati. Auctore Christophoro Clauio Bambergensi. Societatis Iesu.*[956]

Conó de Samos (Χόνων ὁ Σάμιος), matemàtic i astrònom grec del temps de Ptolemeu II Filadelf i Ptolemeu III Evergetes. Fou amic, i potser fins i tot mestre, d'Arquimedes.

Cràtil (Κράτυλος) (segle V aC), filòsof. Se'n coneixen pocs detalls.

Críties (Κριτίας) (Atenes [Grècia], 460 aC - Muníquia [Grècia], ∼403 aC), sofista i orador grec, deixeble de Sòcrates i oncle carnal de Plató.

Dedekind, Julius Wilhelm Richard (Brunsvic [Alemanya], 6 d'octubre del 1831 - Brunsvic, 12 de febrer del 1916), matemàtic alemany.

Demòcrit d'Abdera (Δημόκριτος ο Αβδηρίτης) (Abdera [Tràcia, Grècia], ∼460 aC - ?, ∼370 aC), matemàtic grec.

Descartes, René (La Haye en Touraine [França], 31 de març del 1596 - Estocolm [Suècia], 11 de febrer del 1650), filòsof i matemàtic francès.

Dieudonné, Jean (Lilla [França], 1 de juliol del 1906 - París [França], 29 de novembre del 1992), matemàtic francès.

Diocles de Carist (Διοκλής ο Καρύστιος) (Carist [Grècia], ∼240 aC - Carist [Grècia], ∼180 aC), matemàtic i geòmetra grec. Inventà la «cissoide».

Diofant d'Alexandria (Διόφαντος ὁ Ἀλεξανδρεύς) (?, ∼200 - ?, ∼284), aritmètic grec.

Diògenes Laerci (Διογένης Λαέρτιος) (Cilícia [Grècia], 180 - ?, 240), filòsof grec, historiador de la filosofia i doxògraf, nascut suposadament a Laerte (Cilícia). No se'n saben ni la vida, ni l'edat ni els estudis. Com que els últims autors que esmen-

956. Vegeu <https://books.google.cat/books?id=uW0WVOlJvc8C>.

ta són Plutarc i Sext Empíric, es suposa que va viure a cavall dels segles II i III.

Dionísodor de Caunos (Διονυσόδωρος ο Καύνειος) (Caunos [ara Turquia], 250 aC - ?, 190 aC), geòmetra grec que va resoldre el problema consistent a dividir l'esfera en una proporció donada.

Dositeu de Pelusium (Δωσίθεος), també conegut com a Dositeu de Colonos (~230 aC), geòmetra grec al qual Arquimedes va dedicar alguns dels llibres, com ara *De l'esfera i el cilindre* (Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνρου) i *De les línies espirals* (Περὶ ἑλίκων).

Eliot, Thomas Stearns (Orde del Mèrit, OM), més conegut com a T. S. Eliot (Saint Louis [Estats Units d'Amèrica], 26 de setembre del 1888 - Londres [Anglaterra], 4 de gener del 1965), poeta, escriptor, dramaturg i professor universitari, guardonat amb el Premi Nobel de Literatura l'any 1948. En les seves obres destaquen la cura formal i les referències culturals. Enquadrat al New Criticism, pensava que l'art no havia de ser l'expressió d'experiències personals sinó un treball sobre símbols universals.

Eratòstenes de Cirene (Ἐρατοσθένης ο Κυρηναίος) (Cirene [Líbia], 276 aC - Alexandria [Egipte], 194 aC), matemàtic grec.

Euclides (Εὐκλείδης) (?, ~325 aC - Alexandria [Egipte], ~265 aC), matemàtic grec.

Eudem de Rodes (Εὔδεμος) (Rodes [Grècia], 370 aC - ?, 316 aC), filòsof grec, deixeble d'Aristòtil i company de Teofrast. Entre les seves obres destaquen les d'història de la matemàtica i les d'astronomia.

Èudox de Cnidos (Εὔδοξος ὁ Κνίδια) (Cnidos [Grècia], 408 aC - Atenes [Grècia], 355 aC), matemàtic grec.

Eutoci d'Ascaló (Εὐτόκιος ο Ασκαλωνίτης), escriptor grec, comentarista d'Apol·loni i d'Arquimedes. Va viure cap a mitjan segle VI. Se'n conserven els originals grecs de les obres següents: *Comentari del primer dels quatre llibres de les* '*Còniques*' *d'Apol·loni*, *Comentari de* '*De l'esfera i el cilindre*', *de*

‘*Sobre la quadratura del cercle*’ i de dos llibres sobre l’equilibri d’Arquimedes.

FONTANA, Niccolò, anomenat Tartaglia (El Quec) (Brescia [Itàlia], ∼1499 - Venècia [Itàlia], 13 de desembre del 1557), matemàtic italià.

GAUSS, Carl Friedrich (Brunsvic [Alemanya], 30 d’abril del 1777 - Göttingen [Alemanya], 23 de febrer del 1855), matemàtic alemany.

GEL·LI, Aule (Aulus Gellius) (Roma [Itàlia], ∼115 - Roma [Itàlia], 180), escriptor romà. Viatjà molt a Grècia i residí durant un cert període a Atenes. La seva obra més coneguda és *Noctes Atticæ* (vint toms), en la qual agrupà informació sobre història, filosofia i filologia. Vegeu GEL·LI (1930).

GEMINE DE RODES (Γέμινος ο Ρόδιος), astrònom i matemàtic grec.

GREGORY, David (Aberdeen [Escòcia], 3 de juny del 1659 - Berkshire [Anglaterra], 10 d’octubre del 1707), matemàtic escocès i divulgador de l’obra d’Isaac Newton.

AL-ḤAJJAJ, ibn Yūssuf ibn Matar (?, 786 - ?, 833), matemàtic i traductor de Bagdad. En desconeixem la vida. Sabem, però, que va ser el primer traductor dels *Elements* d’Euclides i de l’*Almagest* de Ptolemeu a l’àrab, presumptament a partir d’originals en grec. Sembla que fou la seva traducció la que usà Adelard de Bath per a fer la seva traducció al llatí a començaments del segle XII.

HĀRŪN AL-RAŠĪD, Abu-Jàfar, conegut simplement com a Hārūn al-Rašīd (Raga [Mèdia Magna, Pèrsia, ara Iran], 27 de març del 763 - Tus [Razavi Khorasan, Pèrsia, ara Iran], 24 de març del 809), fou el cinquè califa de la dinastia abbàssida de Bagdad. Governà des del 14 de setembre del 786 fins a la seva mort. El seu regnat representà l’apogeu de la dinastia i fou marcat per una gran prosperitat científica, cultural i religiosa. La seva reputació de geni intel·lectual, polític i militar el va fer el protagonista de diversos contes i llegendes, els més coneguts dels quals són *Les mil i una nits*.

Heiberg, Johan Ludvig (Aalborg [Dinamarca], 27 de novembre del 1854 - Copenhaguen [Dinamarca], 4 de gener del 1928), filòleg i historiador danès, conegut per l'edició completa de l'obra d'Euclides i de l'*Almagest* de Ptolemeu. S'adonà que el «Palimpsest d'Arquimedes», que trobà a Constantinoble l'any 1906, contenia textos d'Arquimedes, en particular *El Mètode.*

Heró d'Alexandria (Ἥρων ὁ Ἀλεξανδρεύς) (Alexandria [Egipte], ∼10 - ?, ∼70), matemàtic grec.

Heròdot d'Halicarnàs (Ἡρόδοτος Ἁλικαρνᾶσσεύς) (Halicarnàs [Grècia], 484 aC - Turis [Grècia], 425 aC), historiador grec, autor d'*Història*, una investigació —ἱστορία— de les causes de les Guerres Mèdiques.

Hilbert, David (Königsberg [Prússia, ara Kaliningrad, Rússia], 23 de gener del 1862 - Göttingen [Alemanya], 14 de febrer del 1943), matemàtic prussià.

Hiparc (Ἵππαρχος ο Νικαεύς) (Nicea [Bitínia, avui Turquia], ∼190 aC - ?, ∼120 aC), matemàtic grec.

Hipàtia (o Hipàcia) d'Alexandria (Ὑπατία) (Alexandria [Egipte], ∼355 - Alexandria [Egipte], març del 415), matemàtica grega.

Hipòcrates de Quios (Ἱπποκράτης ὁ Χῖος) (Quios [Grècia], ∼470 aC - Atenes [Grècia], ∼410 aC), matemàtic grec.

Hipsicles (Ὑψικλής ο Αλεξανδρεύς) (?, ∼190 aC - ?, ∼120 aC), matemàtic grec.

Isidor de Milet el Vell (Ἰσ΄δωρος ὁ Μιλήσιος) (Milet [Grècia], ∼442 - ?, ∼537), arquitecte i professor. Durant pràcticament tota la vida desenvolupà la tasca de professor de matemàtiques i física a Alexandria i Constantinoble, però és recordat com a arquitecte, especialment per la reconstrucció de Santa Sofia de Constantinoble, que si bé inicià l'any 532 amb la col·laboració d'Antemi de Tral·les, acabà en solitari l'any 537.

Jacobi, Carl Gustav Jacob (Potsdam [Alemanya], 10 de desembre del 1804 - Berlín [Alemanya], 18 de febrer del 1851), matemàtic alemany.

Jordanus Nemorarius (o Jordanus de Nemore) (?, ∼1225 - ?, 1260), prominent científic de l'edat mitjana. Aprofundí la matemàtica i l'astronomia de l'època.

Lleó, matemàtic grec i deixeble de Neocleides. Va escriure uns *Elements* abans dels d'Euclides i introduí el terme «diorisma».

al-Ma'mūn, Abū l-'Abbās 'Abd Allāh (14 de setembre del 786 - ?, 833) fou califa abbàssida de Bagdad (813-833).

al-Manṣūr ibn Muhàmmad ibn Alí, Abū-Ja'far 'Abd Allāh (al-Humayma [Jordània], 709/713 - camí de la Meca [Aràbia], 775) fou califa abbàssida de Bagdad (754-775).

Menelau d'Alexandria (Μενέλαος ὁ Ἀλεξανδρεύς), matemàtic i astrònom grec al qual devem el «teorema de Menelau».

Menge, Heinrich (Aquisgrà [Alemanya], 19 de juny del 1838 - ?, 1904), filòleg alemany i mestre d'escola.

Mersenne, Marin (Oizé [França], 8 de setembre del 1588 - París [França], 1 de setembre del 1648), il·lustre erudit francès del segle xvii, membre de l'orde dels mínims. S'aplicà en els camps de la teologia, la matemàtica i la teoria musical.

Newton, Sir Isaac (Woolsthorpe-by-Colsterworth [Lincolnshire, Anglaterra], 4 de gener del 1643 - Kensington [Middlesex, Anglaterra], 31 de març del 1727), físic, matemàtic i filòsof anglès.

Nicòmac de Gerasa (Νικόμαχος ο Γερασηνός) (Gerasa [Síria], i dC - ?, i dC), matemàtic grec.

Nicomedes (Νικομήδης) (?, ∼280 aC - ?, ∼210 aC), matemàtic grec.

Œnòpides de Quios (Οἰνοπίδης ὁ Χῖος), destacat matemàtic i astrònom grec nadiu de Quios, probablement contemporani d'Anaxàgores.

Pappos d'Alexandria (Πάππος ὁ Ἀλεξανδρεύς) (Alexandria [Egipte], ∼290 - Alexandria [Egipte], ∼350), matemàtic grec.

Pèricles (Περικλῆς) (Atenes [Grècia], 495 aC - Atenes, 429 aC), home d'estat atenenc tan important que va donar nom a tot el segle v aC —el «segle de Pèricles».

PEYRARD, François (comuna de Sant Victor de Malascorts [Alt Loira, França], 20 d'octubre del 1759/1760 - París [França], 3 d'octubre del 1822), erudit i filòsof francès molt aclamat per la intel·lectualitat internacional pel fet d'haver identificat el manuscrit d'Euclides, *Vaticanus græcus, 190*, que havia passat desapercebut fins aleshores. És la versió més antiga del text del cèlebre geòmetra grec. En féu la traducció al llatí i al francès.

PISANO, Nino (Pisa [Itàlia], ∼1315 - Pisa [Itàlia], 1370), escultor italià, considerat el darrer dels grans escultors del Trecento. Se'l coneix, entre altres obres, pel relleu que representa Euclides en el campanar de Santa Maria del Fiore (Florència).

PITÀGORES (Πυθαγόρας ο Σάμιος) (Samos [Grècia], 581 aC - Metapont [Magna Grècia], 475 aC), matemàtic i filòsof grec.

PLATÓ (Πλάτων) —l'autèntic nom del qual era, potser, Arístocles, el nom de l'avi— (Atenes [Grècia], ∼21 de maig del 427 aC - Atenes [Grècia], 347 aC), filòsof d'immensa influència en la Grècia clàssica. Va ser deixeble de Cràtil i Sòcrates, i mestre d'Aristòtil. Fundà l'Acadèmia (Ἀκαδήμεια). És l'autor dels famosos Σωκρατικός λόγος (*Diàlegs socràtics*).

PLAYFAIR, John (Angus [Escòcia], 10 de març del 1748 - Burntisland [Escòcia], 20 de juliol del 1819), matemàtic escocès.

PLUTARC, Luci Mestri (Πλούταρχος) (Queronea [Grècia], ∼46 - Delfos [Grècia], ∼120), historiador i assagista grec que va viure en els temps de la Grècia romana. Sobretot és conegut per la col·lecció de biografies de personatges grecs i romans titulada Βίοι Παράλληλοι (*Vides paral·leles*).

PROCLE D'ALEXANDRIA (Πρόκλος ο Διάδοχος) (Constantinoble [Turquia], 412 - Atenes [Grècia], 485), filòsof neoplatònic.

PTOLEMEU, Claudi (Κλαύδιος Πτολεμαίος) (?, ∼ 85 - ?, ∼165), matemàtic grec.

PTOLEMEU I *Soter*, El Salvador (Πτολεμαῖος Σωτήρ) (?, 367 aC - ?, 282 aC), general d'Alexandre el Gran, de qui era amic des de la jovenesa. Fou un dels diàdocs principals i es convertí en sàtrapa d'Egipte (321 aC). L'any 305 aC n'esdevingué rei però no pas faraó, dignitat que rebé, en canvi, el seu fill Ptolemeu II. Fou el fundador de la dinastia ptolemaica, que regnà a Egipte fins a l'any 30 aC, quan caigué en mans de l'Imperi romà. Féu construir el famós far d'Alexandria, el Museu i la Biblioteca.

Ptolemeu II *Filadelf*, «aquell que estima el germà i la germana» (Πτολεμαίος Φιλάδελφος) (illa de Kos [Grècia], 309 aC - Egipte, 29 de gener del 246 aC), rei d'Egipte de la dinastia ptolemaica. Succeí al seu pare, Ptolemeu I Soter.

Ptolemeu III *Evergetes*, El Benefactor (Πτολεμαῖος Εὐεργέτης), (illa de Kos [Grècia], 285 aC - Alexandria [Egipte], 222 aC), rei d'Egipte de la dinastia ptolemaica, successor de Ptolemeu II Filadelf. Regnà del 246 al 222 aC.

Qurra ibn Marwan al-Sabi al-Harrani, Abu-l-Hàssan Thàbit ibn (Alṫṣābi Thābit ibn Qurra al Ḥarrānī) (Harran [Turquia], 836 - Bagdad [Iraq], 18 de febrer del 901), astrònom, musicòleg i matemàtic àrab, conegut com a Thàbit ibn Qurra.

Ratdolt, Erhard (Augsburg [Alemanya], 1442 - Venècia [Itàlia], ∼1528), editor que s'instal·là a Venècia del 1476 al 1486. Fou el responsable de la primera edició dels *Elements* d'Euclides (1482).

Russell, Bertrand (Trellech [Gal·les], 18 de maig del 1872 - Penrhyndeudraeth [Gal·les], 2 de febrer del 1970), filòsof i matemàtic gal·lès.

Saint-Vincent, Grégoire de (Gregorius de Sancto Vincentio) (Bruges [Bèlgica], 22 de març del 1584 - Gant [Bèlgica], 5 de juny del 1667). A l'obra *Opus geometricum quadraturæ circuli et sectionum coni* (1647), introduí l'expressió «mètode d'exhaustió» per tal de referir-se al mètode emprat per Èudox, que Euclides recull a Ex 1 i aplica al llibre xii.

Sext Empíric (Σέξτος ο Εμπειρικός) (?, 160 - Alexandria [Egipte], 210), metge i filòsof. Va escriure obres diverses en grec antic.

Simson, Robert (West Kilbride [Ayrshire, Escòcia], 14 d'octubre del 1687 - Glasgow [Escòcia], 1 d'octubre del 1768), matemàtic escocès del segle XVIII, professor a la Universitat de Glasgow.

SÒCRATES (Σωκράτης) (Atenes [Grècia], ∼470 aC - Atenes [Grècia], ∼399 aC), filòsof grec considerat el fundador de la filosofia occidental.

TALES (Θαλῆς ὁ Μιλέσιος) (Milet [Grècia], ∼624 aC - Milet [Grècia], ∼547 aC), matemàtic i filòsof grec.

TEETET D'ATENES (Θεαίτητος ο Αθηναίος) (Atenes [Grècia], ∼417 aC - ?, ∼369 aC), filòsof.

TEÓ D'ALEXANDRIA (Θέων ὁ Ἀλεξανδρεύς) (Alexandria [Egipte], ∼370 - Alexandria [Egipte], ∼415), matemàtic i astrònom grec, pare d'Hipàtia d'Alexandria.

TEÓ D'ESMIRNA (Θέων ὁ Σμύρνα) (Esmirna [Turquia], ∼70 - ?, ∼135), matemàtic grec.

TEODOR DE CIRENE (Θεόδωρος ὁ Κυρηναῖος) (Cirene [Líbia], 465 aC - Cirene [Líbia], 398 aC), filòsof pitagòric del temps de Pèricles.

TEUDI DE MAGNÈSIA, matemàtic grec del segle IV aC.

TODHUNTER, Isaac (Rye [Anglaterra], 23 de novembre del 1820 - Cambridge [Anglaterra], 1 de març del 1884), matemàtic anglès.

AT-TUSSÍ, Nàssir-ad-Din (Nàssir-ad-Din Abu-Jàfar Muhàmmad ibn Muhàmmad ibn al-Hàssan at-Tussí), conegut com a Nàssir-ad-Din at-Tussí (Tus [Iran], 1201 - Kadhimiya [Iraq], 1274), matemàtic.

VARRÓ, Marc Terenci (Marcus Terentius Varro) (Reate [Itàlia], 116 aC - Roma, 27 aC), polígraf, escriptor, militar i magistrat romà. És considerat un dels erudits més grans de la història de Roma. Quan tenia vint-i-cinc anys es va dedicar a l'estudi de la literatura grega. No se sap gairebé res més de la seva vida. La major part de la seva obra, com ara *Disciplinæ*, s'ha perdut.

XENÒCRATES DE CALCEDÒNIA (Ξενοκράτης ο Χαλκηδόνιος), filòsof grec de Bitínia.

ZENÓ DE SIDÓ (Ζήνων ὁ Σιδώνιος) (Sidó [Imperi selèucida, ara Líban], ∼150 aC - Elea o Atenes? [Itàlia o Grècia], ∼ 75 aC), filòsof grec epicuri, contemporani de Ciceró, que el va sentir a Atenes. Parlava d'altres filòsofs en termes poc respectuosos i, per exemple, es mofava de Sòcrates. Fou deixeble d'Apol·lodor. Diògenes Laerci el descriu com un pensador preclar i intel·ligent. Ciceró comparteix aquestes consideracions. Procle hi fa referència com a crític d'Euclides.

ZENÒDOR (Ζηνόδωρος ο Γεωμέτρης), matemàtic grec del segle II aC, autor de *Sobre les figures isoperimètriques* (Περὶ ισομετρων σχημάτων).

Bibliografia

ACERBI, Fabio (2007). *Euclide. Tutte le opere*. Milà: Bompiani. [Traducció italiana i notes de l'autor]

ADAM, Charles i TANNERY, Paul (1897-1913). *Œuvres de Descartes*. París: Léopold Cerf. [Reeditat per Vrin: París, 1996. Vegeu <http://fr.wikisource.org/wiki/Livre:Descartes_-_Œuvres,_éd.Adam_et_Tannery,_I.djvu>]

ARISTÒTIL (1863). *Météorologie d'Aristote* (*Μετερολογικων*). París: Librairie Philosophique de Ladrange. [Traducció francesa i notes de J. Barthélemy Saint-Hilaire. Vegeu <http://remacle.org/bloodwolf/philosophes/Aristote/tablemeteorologie.htm>]

——— (1915). *Works of Aristotle*. Oxford: The Clarendon Press. [Traducció anglesa de W. D. Ross. Textos complets en línia: en francès, a <http://remacle.org/bloodwolf/philosophes/Aristote/table.htm>; en anglès, a <http://classics.mit.edu/Browse/index-Aristotle.html>]

——— (1964). *Obras*. Madrid: Aguilar. [Traducció castellana del grec, estudi preliminar, preàmbul i notes de F. P. de Samaranch. Reeditat per Aguilar, 1997. En línia, en francès, a <http://remacle.org/bloodwolf/philosophes/Aristote/table.htm>; en anglès, a <https://ebooks.adelaide.edu.au/a/aristotle/> o <http://www.perseus.tufts.edu/hopper/searchresults?q=Aristotle>]

——— (1978). *Acerca del alma* (*Περὶ φυχῆς*). Madrid: Gredos. [Vegeu ARISTÒTIL (1964), p. 823-872]

——— (1987). *Tratados de lógica*. Mèxic: Porrúa. [Vegeu ARISTÒTIL (1964), p. 527-564; ARISTÒTIL (1988), p. 300-441; i ARISTÒTIL (1964), p. 351-414. En línia, a <http://classics.mit.edu/Aristotle/posterior.html> i <http://remacle.org/bloodwolf/philosophes/Aristote/analyt2.htm>]

——— (1988). *Organon: Tratados de lógica* (*Οργανον*). Madrid: Gredos. [Vegeu ARISTÒTIL (1964), p. 217-561. En línia, a <https.//enblancoe.files.wordpress.com/2013/11/aristoteles-tratados-de-logica.pdf> i

<https://drive.google.com/file/d/0By4kcbi6MzzdUHhVQnUtcTNUdk0/edit?pli=1>]

Aristòtil (1995). *Ètica nicomaquea* (*Ἠθικά Νικομάχεια*). Barcelona: Bernat Metge. [Revisió i introducció de Josep Batalla. En dos volums. En castellà, amb introducció d'Emilio Lledó i traducció i notes de Julio Pallí. Gredos: Madrid, 1995. Vegeu Aristòtil (1964), p. 1103–1168, i Aristòtil (1915), volum 8, i, en línia, a <http://remacle.org/bloodwolf/philosophes/Aristote/eudeme1-8.htm> i <http://www.perseus.tufts.edu/hopper/text?doc=Perseus%3Atext%3A1999.01.0050>]

——— (1996). *Acerca del cielo o Meteorológicos* (*Μετεωρολογικά*). Madrid: Gredos. [Introducció, traducció castellana i notes de M. Candel. Revisada per D. Riaño. En línia, en francès, Aristòtil (1863); en anglès, a <http://ebooks.adelaide.edu.au/a/aristotle/meteorology/> i <http://ebooks.adelaide.edu.au/a/aristotle/heavens/>]

——— (2000). *Metafísica* (*Μετὰφύσικα*). Madrid: Gredos. [En línia, la traducció de Valentín García Yebra, a <http://www.oposinet.com/filosofia/temas/w4.pdf>. Vegeu Aristòtil (1964), p. 903-1089]

——— (2003). *Aristote. Œuvre complete*. [En línia, en grec i francès, a <http://remacle.org/bloodwolf/philosophes/Aristote/table.htm>]

——— (2007). *Prior Analytics* (*Ἀναλυτικὰ Περότερα*). Austràlia Sud: The University of Adelaide. [Traducció anglesa d'A. J. Jenkinon. Vegeu Aristòtil (1964), p. 527-564, i Aristòtil (1988), p. 85-300. Vegeu <http://classics.mit.edu/Aristotle/prior.html> i <http://remacle.org/bloodwolf/philosophes/Aristote/tableanal1.htm>]

Arquimedes (1997). *Mètode*: *Mètode d'Arquimedes sobre els teoremes mecànics dedicat a Eratòstenes*. Barcelona: Bernat Metge. [Traducció de J. Vaqué i edició crítica de P.-M. González Urbaneja]

——— (2010). *Sobre l'esfera i el cilindre* (*Περὶ σφαίρας καὶ κυλινδρου*). Barcelona: Bernat Metge. [Introducció, revisió, traducció, notes i figures de R. Masià]

——— (2016). *Sobre les conoides i les esferoides (Περὶ κονοειδοεων καὶ Σφαιροειδεων). La mesura del cercle (Κύκλου μέτρησις). La quadratura de la paràbola* (*Τετραγωνισμός παραβολῆ*). Barcelona: Bernat Metge. [Introducció, revisió, traducció, notes i figures de R. Masià]

Autors diversos (1970). *La Bíblia*. Andorra: Casal i Vall. [Versió dels textos originals i notes dels monjos de Montserrat. Vegeu <http://www.lluisvives.com/servlet/SirveObras/jlv/12048621999195962976846/>]

Borelli, Giovanni Alfonso (1658). *Euclides Restitutus*. Pisa: Pifis. [En xarxa, a <https://books.google.es/books?id=Dz8PAAAAQAAJ&printsec=&hl=ca&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q=false>]

BOYER, Carl Benjamin (1968). *A History of Mathematics*. Nova York: John Wiley & Sons. [Revisat per Uta C. Merzbach el 1989. Traducció castellana de la primera edició de M. Martínez Pérez: *Historia de la matemática*. Alianza: Madrid, 1986. En línia, a <https://archive.org/stream/AHistoryOfMathematics/Boyer-AHistoryOfMathematics#page/n0/mode/2up>]

BUNT, Lucas N. H., JONES, Phillip. S. i BEDIENT, Jack D. (1976). *The Historical Roots of Elementary Mathematics*. Ontario, Canadà: General Publishing Company. [Reedició a Dover: Nova York, 1988]

BURTON, David M. (1989). *The History of Mathematics*: *An Introduction*. Nova York: McGraw-Hill. [Reeditat profusament: 1991, 1995, 1997, 2003 i 2007]

BUSARD, Hubert L. L. (1983). *The First Translation of Euclid's Elements Commonly Ascribed to Adelard of Bath, Books I-VIII and Books X.36, XV.2*. Toronto, Canadà: Pontifical Institute of Mediæval Studies.

CASSIODOR (1886). *Variæ Epistolæ*. Liverpool: Liverpool University Press. [Traducció anglesa de T. Hodgkin: *The Letters of Cassiodorus*, en línia, a <http://www.gutenberg.org/files/18590/18590-h/18590-h.htm>]

CICERÓ, Marc Tul·li (1948). *Tusculanes*. Barcelona: Bernat Metge. [En tres volums: 1948, 1949, 1950]

CLAGETT, Marshall (1953). "The Medieval Latin Translations from the Arabic of the Elements of Euclid with Special Emphasis of the Versions of Adelard of Bath". *Isis* 44, p. 16–42.

CLAVIUS, Christopher (1574). *Euclidis Elementorum libri XV. Accessit XVI de solidorum regularium comparatione. Omnes perspicuis demonstrationibus, accuratisque scholiis illustrati. Auctore Christophoro Clauio Bambergensi. Societatis Iesu*. Roma: Vicentium Accolium. [En línia, a <https://books.google.cat/books?id=uW0WVOlJvc8C>]

DESCARTES, René (1637). *Géométrie*. Leiden: Imprimerie Ian Marie. [Edició francesa: ADAM i TANNERY (1913), volum VI, p. 367-486; traducció anglesa: LATHAM i SMITH (1925); castellana: QUINTÁS (1981), p. 276-407; i catalana: PLA i VIADER (1999). Vegeu <http://fr.wikisource.org/wiki/Page:Descartes_La_G%C3%A9om%C3%A9trie.djvu/1>]

DIEC (1995). *Diccionari de la llengua catalana*. Barcelona: Institut d'Estudis Catalans. [Revisat i ampliat l'any 2007. En línia, a <http://dlc.iec.cat/>]

DORCE, Carlos (2013). *Història de la matemàtica*: *Des de Mesopotàmia al Renaixement*. Barcelona: Universitat de Barcelona.

ÉFIMOV, Nikolai (1981). *Géométrie Supérieur*. Moscou: Éditions Mir. [Traducció del rus al francés d'E. Makho]

Einstein, Albert (1921). *Geometrie und Erfahrung*. Berlín: Springer.

——— (1934). "On the Method of Theoretical Physics". *Philosophy of Science* 1 (2), p 163–169. [En línia, a <https://www.stmarys-cacedu/sites/default/files/attachments/files/On_The_Method_of_Theoretical_Physics.pdf>]

——— (1953). "Zur Methodik der theoretischen Physik", a *Mein Weltbild*. Zuric: Erstveröffentlichung im Europa Verlag AG3. [Conferència Herbert Spencer. Oxford, 10 de juny del 1933. Publicat per C. Seelig. En línia, a <https://gedankenfrei.files.wordpress.com/2009/01/mein-weltbild-albert-einstein.pdf>. Traducció anglesa a Einstein (1934) i Einstein (1954), p. 270]

——— (1954). *Ideas and Opinions*. Nova York: Random House. [Traducció castellana d'A. Golder. Barton: Barcelona, 2000]

Eliot, T. S. (1945). *What is a Classic?: An address delivered before the Virgil Society on the 16th of October 1944*. Londres: Faber & Faber. [En línia, a <http://bracchiumforte.com/PDFs/tseliot.pdf>]

Euclides (iii aC*a*). *Elements*. Edició catalana en aquest volum: llibres i, ii, iii, iv, v i vi, i a Pla (2018*b*): llibres vii, viii, ix, x, xi, xii i xiii; castellana parcial a Vera (1970), volum i, p. 687–980, i completa a Puertas (1991), en tres volums: 1991, 1994 i 1996; angleses a Heath (1925) i Fitzpatrick (2008); franceses a Kayas (1978) i Vitrac (1990); italianes a Acerbi (2007) i Frajese i Maccioni (1970); alemanya a Haller (2008). Per a la versió grega, en paper, vegeu Acerbi (2007) i Fitzpatrick (2008)]

——— (iii aC*b*). *Elements*. [En línia, en català, a <http://www.euclides.org/menu/elements_cat/indexeuclides.htm>; en castellà, a <http://www.euclides.org/menu/elements_eps/indexeuclides.htm>; en anglès, a <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/Euclid.html>; en grec, a <http://www.physics.ntua.gr/~mourmouras/euclid/>; en llatí, a <http://www.euclides.org/menu/heiberg/euclidiselementa.htm>.

——— (iii aC*c*). *Elements*. [Per a les edicions antigues i modernes de l'obra d'Euclides, vegeu, en línia, <http://onlinebooks.library.upenn.edu/webbin/book/lookupname?key=Euclid>]

Fitzpatrick, Richard (2008). *Euclid's Elements of geometry: The greek text of J.L. Heiberg (1883-1885) from 'Euclidis Elementa, edidit et Latine interpretatus est I.L. Heiberg, in aedibus B.G. Teubneri, 1883-1885'*. Estats Units d'Amèrica: Fitzpatrick. [Editat, i amb una traducció anglesa moderna, per R. Fitzpatrick. En xarxa, a <https://www.math.ust.hk/ mamyan/sc1110/Elements.pdf>]

Frajese, Attilio (1950). "Sul significato dei postulati euclidei". *Scientia* 44 (85), p. 299–305.

Frajese, Attilio (1951). “Sur la signification des postulats euclidiens”. *Archives Internationelles d’Histoire des Sciences* 15, p. 383–391.

——— (1968). “Il sesto postulato di Euclide”. *Periodico di Mathematiche* 1–2, p. 150–159.

——— (1969). *Attraverso la storia della matematica.* Florència: Le Monnier.

Frajese, Atilio i Maccioni, Lamberto (1970). *Gli Elementi.* Torí: Utet.

Gauss, Carl Friedrich (1801). *Disquisitiones Arithmeticæ.* Leipzig: Gerhard Fleischer. [Traducció catalana: Pascual (1986)]

Gel·li, Aule (1930). *Nits àtiques* (*Noctes Atticæ*). Barcelona: Bernat Metge. [3 volums: 1930, 1934 i 1988. En línia i en anglès, a <http://penelope.uchicago.edu/Thayer/E/Roman/Texts/Gellius/10*.html>]

Gray, Jeremy J. (1989). *Ideas of space*: *Euclidean, non-Euclidean, and relativistic.* Oxford: Clarendon Press. [Traducció castellana de F. Romero: *Ideas de espacio.* Mondadori: Madrid, 1992]

Greenberg, Marvin Jay (1993). *Euclidean and non-Euclidean geometries*: *Development and History.* Nova York: Freeman. [3a edició]

Haller, Rudolf (2008). *Euklid: Elemente* (*Euklides: Stoicheia*). Markgröningen: Opera-Platonis. [En línia, a <http://opera-platonis.de/euklid/index.html>]

Hardy, Godfrey Harold (1940). *A Mathematician’s Apology.* Cambridge: Cambridge University Press. [Traducció catalana de M. Merín: *Apologia d’un matemàtic*, amb una introducció de J. Pla. Obrador Edèndum: Santa Coloma de Queralt, 2008; castellana de J. Fernández: *Apología de un matemático.* Nivola: Madrid, 1999. En xarxa i en anglès, a <http://www.math.ualberta.ca/mss/ misc/A%20 Mathematician’s%20Apology.pdf>]

Heath, Thomas L. (1921). *A History of Greek Mathematics.* Toronto, Canadà: General Publishing Company. [Reeditat per Dover: *Greek Mathematics.* Nova York, 1981, en 2 volums. En línia, a <https://archive.org/stream/cu31924008704219#page/n7/mode/2up> (volum 1) i <https://archive.org/stream/ahistorygreekma00heatgoog#page/n7/mode/2up> (volum 2)]

——— (1925). *The Thirteen Books of Euclid’s Elements.* Toronto, Canadà: General Publishing Company. [Reeditat per Dover: Nova York, 1956, en 3 volums. Edició de la traducció, sense notes, en un volum: *Euclid’s Elements.* Green Lion Press: Ann Arbor, Michigan. 2002. Reeditat el 2003 i el 2007. En línia, a <http://en.wikisource.org/wiki/The_Elements_of_Euclid>]

Hilbert, David (1899). *Grundlagen der Geometrie.* Stuttgart: Teubner. [Traducció castellana a Hilbert (1953). Vegeu <https://archive.org/details/grunddergeovon00hilbrich>]

Hilbert, David (1953). *Fundamentos de la geometría*. Madrid: Consejo Superior de Investigaciones Científicas. [Reeditat, amb un pròleg de J. M. Sánchez Ron: Madrid, 1975]

Jacobi, Carl Gustav Jacob (1881-1891). *Gesammelte Werke*. Berlín: Georg Reimer. [Reeditat per Chelsea: Nova York, 1969]

Kayas, Georges J. (1978). *Euclides. Les Éléments*=ΕΨΚΛΕΙΔΟΨ. ΣΤΟΙΘΕΙΑ. París: CNRS.

Kline, Morris (1972). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Oxford: Oxford University Press. [Traducció castellana de C. Fernández i A. Garciadiego, sota la coordinació de J. Hernández: *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*. Alianza: Madrid, 1992]

Latham, Marcia L. i Smith, David Eugene (1925). *The geometry of René Descartes*. Ontario, Canadà: Open Court. [Reeditat per Dover: Nova York, 1954]

Marchini, Carlo (2006). *Appunti di Geometria classica*. Università degli Studi di Parma. [Vint-i-nou lliçons de geometria, llegides entre el 8 de març i l'1 de juny del 2006, durant el curs acadèmic 2005-2006]

Mueller, Ian (1981). *Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid's Elements*. Cambridge, Massachusetts: MIT. [Reeditat per Dover: Nova York, 2006]

Pappos (1932). *Pappus d'Alexandrie. La Collection Mathématique*. París: Blanchard. [Traducció i notes de Paul Ver Eecke. Reeditat el 1982]

Pascual, Griselda (1986). *Disquisicions aritmètiques de Gauss*. Barcelona: SCM. [Reproducció parcial, a <http://books.google.es/books?id=gYxXFX0IPqIC&printsec=frontcover&hl=ca&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false>]

Peyrard, François (1814-1818). *Les œuvres d'Euclide, traduites en latin et en français, d'après un manuscrit très-ancien qui était resté inconnu jusqu'à nos jours*. París: Chez C. F. Patris. [En línia, a Euclides (III aC*c*)]

——— (1966). *Les Oeuvres d'Euclide, traduites littéralement par F. Peyrard*. París: Blanchard. [Reeditat el 1993]

Pla, Josep (2010). *Una aproximació* [εἰσαγωγή] *a la filosofia de la matemàtica grega des d'un punt de vista matemàtic*: *De Tales de Milet als 'Elements' d'Euclides*. Barcelona: Institut d'Estudis Catalans. Societat Catalana de Filosofia.

——— (2012). *Euclides. La geometría*. Barcelona: RBA.

——— (2016*a*). "Els *Elements* d'Euclides de Campanus de Novara", a *Incunables de la Biblioteca de la Universitat de Barcelona*. Barcelona: Universitat de Barcelona.

PLA, Josep (2016*b*). *Història de la matemàtica: Egipte i Mesopotàmia: Resultats, textos i contextos*. Barcelona: Institut d'Estudis Catalans.

——— (2016*c*). *Història de la matemàtica: Grècia I* (*de Tales i Pitàgores a Plató i Aristòtil*)*: Resultats, textos i contextos*. Barcelona: Institut d'Estudis Catalans.

——— (2018*a*). *Història de la matemàtica: Els 'Elements' d'Euclides: llibres vii, viii, ix, x, xi, xii i xiii*. Barcelona: Institut d'Estudis Catalans.

——— (2018*b*). *Història de la matemática: Grècia III*: *Resultats, textos i contextos*. Barcelona: Institut d'Estudis Catalans. [Pendent de publicació]

——— (2018*c*). *Els Nombres. Una aproximació a la història de la matemàtica*. Barcelona: Universitat de Barcelona. [Pendent de publicació]

PLA, Josep i VIADER, Pelegrí (1999). *René Descartes. La Geometria*. Barcelona: Institut d'Estudis Catalans, Eumo i Pòrtic. [Traducció catalana amb introducció i comentaris dels autors]

PLATÓ (1871). *Obras completas de Platón*. Madrid: Medina y Navarro. [Traducció castellana de P. de Azcárate. Vegeu <http://www.filosofia.org/cla/pla/azcarate.htm>]

——— (1928). *Hípias Menor* (*Ἱππίας ἐλάττω*), *Hípias Major* (*Ἱππίας Μείζω*), *Eutidem* (*Εὐθύδημος*). Barcelona: Bernat Metge. [Traducció catalana de J. Crexells, C. Riba i J. Serra Húnter; traducció castellana de J. A. Míguez, *Hipias Menor*, *Hipias Mayor*, *Eutidemo*, *Laques*. PLATÓ (1966-1969), *Defensa de Sócrates*; traducció anglesa, a PLATÓ (1962)]

——— (1928-2009). *Diàlegs*. Barcelona: Bernat Metge.

——— (1962). *Great Dialogues of Plato*. Nova York: Mentor Books. [Traducció de W. H. D. Rouse]

——— (1966-1969). *Obras completas*. Madrid: Aguilar. [Vegeu també PLATÓ (1871)]

——— (1989). *La República* (Πολιτεία). Barcelona: Bernat Metge. [Traducció catalana de Manuel Balasch, pvre., en tres volums (1989, llibres i-iv, 1990, llibres v-vii, 1992, llibres viii-x), (PLATÓ 1928, volums x-xii); traducció castellana de José Antonio Míguez, *La República o de la justicia*: PLATÓ (1966-1969), p. 653-844]

PROCLE (1948). *Les Commentaires sur le premier livre des Éléments d'Euclide*. Bruges: Desclée de Brouwer. [Traducció francesa i notes de Paul Ver Eecke. Reeditat el 1969]

——— (1970). *A Commentary on the First Book of Euclid's 'Elements' (Σχόλια εἰς τὸ πρῶτον τῶν Εὐκλείδου στοιχείων)*. Princeton: Princeton University Press. [Traducció anglesa i notes de G. R. Morrow;

francesa a PROCLE (1948); italiana a PROCLE (1978); castellana parcial a VERA (1970), volum II, p. 1141-1184. En línia i en grec, a <http://www.wilbourhall.org/millionbookspdfs/proclidiadochiin00procuoft.pdf>]

PROCLE (1978). *Commento al I libro degli 'Elementi' di Euclide* (V dC). Pisa: Giardini. [Traducció italiana, amb introducció i notes, de Maria Timpanaro Cardini]

PUERTAS, María Luisa (1991). *Elementos. Libros I-IV.* Madrid: Gredos. [Introducció de L. Vega; traducció i notes de M. L. Puertas Castaños]

——— (1994). *Elementos. Libros V-IX.* Madrid: Gredos. [Traducció i notes de M. L. Puertas Castaños]

QUINTÁS, Guillermo (1981). *Discurso del método para razonar correctamente y buscar la verdad en las ciencias, seguido de tres Ensayos, La Dióptrica, Los Meteoros, y la Geometría.* Madrid: Alfaguara.

REVENTÓS, Agustí (2008). *Geometria axiomàtica.* Barcelona: Societat Catalana de Matemàtiques. [Vegeu <http://www.iecat.net/institucio/societats/SCMatematiques/redir.asp?direc=Publicacions/pubs.as&imag=publicacions>]

SIMSON, Robert (1756). *Euclidis Elementorum.* Londres: Glasgow University Press. [Traducció anglesa: *Elements of Euclid. The first six books.* De Silver: Filadèlfia, 1838. En línia, a <https://archive.org/stream/elementseuclid00euclgoog#page/n6/mode/2up>]

SZÁBÓ, Árpad (1960). "Anfänge des Euklidischen Axiomensystems". *Archive for History of Exact Sciences* 1, p. 37-106. [Publicat a la recopilació *Zur Geschichte der griechischen Mathematik*, editada per Oskar Becker. Darmstadt, 1965, p. 355-461]

VERA, Francisco (1970). *Científicos griegos.* Madrid: Aguilar. [2 volums]

VITRAC, Bernard (1990). *Euclide. Les Éléments. Livres I à IV.* París: PUF.

——— (1994). *Euclide. Les Éléments. Livres V à IX.* París: PUF.

XENOFONT (1923). *Records de Sòcrates.* Barcelona: Bernat Metge. [Text i traducció de Carles Riba]

ZEUTHEN, Hieronimus Georg (1896). "Die geometrische Construction als «Existenzbeweis» in der antiken Geometrie". *Matematische Annalen* 47, p. 222–228. [En línia, a <gdz.sub.uni-goettingen>]

Índex d'antropònims

Adelard de Bath, 4, 355, 359
Agustí d'Hipona, 3, 355
Anaxàgores, 355, 361
Antemi, 355, 360
Apol·lodor, 355, 365
Apol·loni, XIII, 163, 356, 358
Aristarc de Samos, XIII, 356
Aristeu de Crotona, XIII, 356
Arístocles, *vegeu* Plató
Aristòtil, IX, 8, 9, 14, 19, 48, 51, 74, 80, 84, 96, 180, 185, 214, 239, 266, 267, 285, 287, 289, 301, 302, 356, 358, 362
    Liceu, 8, 356
    magnitud, 48, 266
    quadrar, 180
    quadrat/oblong, 80
    reducció a l'absurd, 96
Arquimedes, XII, XIII, 25, 48, 266, 356–360
    línia, 266
    postulat d', 266
    principi d', 25
    sòlid, 266
    superfície, 266

Bassols, Margarida, XIV
Bayer, Pilar, III, XIV
Boeci, 2, 4, 356
Bolzano, Bernard, 24, 356
    principi de, 24
Borelli, Giovanni Alfonso, 93, 356
Boyer, Carl Benjamin, 6

Campanus de Novara, Giovanni, 4, 5, 185, 356
Caveing, Maurice, 15
Ciceró, Marc Tul·li, 3, 356, 365
Clavius, Christopher, 5, 63, 356
Conó, XIII, 357
Cràtil, 357, 362
Críties, 21, 22, 357

Dedekind, Richard, 86, 357
    infinit de, 86
Demòcrit, 8, 11, 72, 357
Descartes, René, 1, 234, 357
Dieudonné, Jean, 2, 71, 357
Diocles, XIII, 357
    cissoide, 357
Diofant, XIII, 357
Diògenes Laerci, 355, 357, 365
Dionísodor, XIII, 358
Dositeu, XIII, 358

Einstein, Albert, XI, 1
Eliot, Thomas Stearns, 7, 358
Eratòstenes, XIII, 358
Euclides, VII, XI–XIV, 1, 3–12, 14, 16, 18–20, 23–25, 27, 30, 33–35, 39, 41, 45–48, 50, 53, 54, 57, 65, 67, 71–73, 75, 77–94, 96–101,

103, 104, 106, 107, 109–112, 114–116, 118, 119, 121, 123, 124, 126–129, 132, 134, 135, 141–143, 145–153, 155–159, 161–163, 166–168, 170, 175, 177, 178, 180–185, 187, 188, 191, 194, 196, 199, 200, 202, 204, 206, 209, 210, 212–214, 217, 226, 228, 229, 232, 236–241, 252, 254, 263–267, 270, 271, 276, 279, 282–284, 292, 299, 305, 311, 312, 322, 334, 340, 343, 347, 349, 350, 353, 355, 357, 359–363, 365
Dades (Δεδομένα), 5
Στοιχεῖα, VII, 1
Porismes (Πορισμάτων Βιβλία), 109
demostració indirecta, 27
demostració per l'absurd, 27
figures, 27
ideals, 27
infinit en acte, 27
mètode deductiu, 90
Eudem, 117, 130, 358
Èudox, XIII, 9, 11, 47–49, 53, 73, 180, 264–267, 270, 304, 315, 358, 363
teoria de la proporció, 9
Eutoci, 130, 358

filòsofs
anglesos
Adelard, *vegeu* Adelard de Bath
gal·lesos
Russell, *vegeu* matemàtics gal·lesos
grecs
Anaxàgores de Clazòmenes, *vegeu* Anaxàgores
Apol·lodor Epicur, *vegeu* Apol·lodor
Aristarc de Samos, *vegeu* Aristarc
Aristòtil, *vegeu* Aristòtil
Cràtil, *vegeu* Cràtil
Críties d'Atenes, *vegeu* Críties
Diògenes Laerci, *vegeu* Diògenes Laerci
Eudem de Rodes, *vegeu* Eudem
Pitàgores, *vegeu* matemàtics grecs
Plató, *vegeu* Plató
Plutarc, Luci Mestri, *vegeu* Plutarc, Luci Mestri
Procle, *vegeu* Procle
Sext Empíric, *vegeu* Sext Empíric
Sòcrates, *vegeu* Sòcrates
Tales, *vegeu* matemàtics grecs
Teodor de Cirene, *vegeu* Teodor
Xenòcrates, *vegeu* Xenòcrates
Zenó de Sidó, *vegeu* Zenó de Sidó
romans
Agustí, *vegeu* Agustí d'Hipona
Boeci, *vegeu* Boeci
Ciceró, *vegeu* Ciceró, Marc Tul·li
Fitzpatrick, Richard, 84
Fontana, Niccolò, 359
Forcada, Santi, XIII

Gauss, Carl Friedrich, 238, 359
Gel·li, Aule, 3, 359
Gemine, 130, 359

González-Urbaneja, Pedro Miguel, xii
Gregory, David, 5, 359

al-Ḥajjaj ibn Yūssuf ibn Matar, 4, 359
Hardy, Godfrey Harold, v
Hārūn al-Rašīd, Abu-Jàfar, 4, 359
Heath, Thomas Little, 57, 84, 85, 87, 157, 202
Heiberg, Johan Ludvig, 5, 21, 79, 84, 137, 360
Heró, xiii, 360
Heròdot, 157, 360
Hilbert, David, 93, 360
    axiomes de la geometria, 93
Hiparc, xiii, 360
Hipàtia, xiii, 360, 364
Hipòcrates de Quios, 11, 36, 57, 63, 67, 72, 220, 247, 348, 350, 360
    lúnula, 57, 247
Hipsicles, 2, 360

Isidor de Milet, 2, 360

Jacobi, Carl Gustav Jacob, 71, 360
Jordanus Nemorarius, 208, 361

Kayas, Georges J., 84

Lleó, 72, 361

al-Ma'mūn, Abū l-'Abbās 'Abd Allāh, 4, 361
al-Manṣūr ibn Muhàmmad ibn Alí, Abū-Ja'far 'Abd Allāh, 4, 361
Marchini, Carlo, 238
Masià, Ramon, xii
matemàtics
    alemanys
        Bolzano, *vegeu* Bolzano, Bernard
        Dedekind, *vegeu* Dedekind, Richard
    anglesos
        Newton, *vegeu* Newton, Isaac
        Todhunter, *vegeu* Todhunter, Isaac
    àrabs
        ibn Matar, *vegeu* al-Ḥajjaj ibn Yūssuf ibn Matar
        ibn Qurra, *vegeu* Qurra, Thàbit ibn
        at-Tussí, *vegeu* at-Tussí, Nàssir-ad-Din
    bavaresos
        Clavius, *vegeu* Clavius, Christopher
    catalans
        Forcada, *vegeu* Forcada, Santi
        González-Urbaneja, *vegeu* González-Urbaneja, Pedro Miguel
        Masià, *vegeu* Masià, Ramon
    escocesos
        Gregory, *vegeu* Gregory, David
        Playfair, *vegeu* Playfair, John
        Simson, *vegeu* Simson, Robert
    francesos
        Descartes, *vegeu* Descartes, René
        Dieudonné, *vegeu* Dieudonné, Jean
        Mersenne, *vegeu* Mersenne, Marin
        Saint-Vincent, Grégoire de, 363

gal·lesos
Russell, *vegeu* Russell, Bertrand
grecs
Antemi de Tral·les, *vegeu* Antemi
Apol·loni de Perge, *vegeu* Apol·loni
Aristarc de Samos, *vegeu* Aristarc
Aristeu de Crotona, *vegeu* Aristeu
Arquimedes de Siracusa, *vegeu* Arquimedes
Conó de Samos, *vegeu* Conó
Demòcrit d'Abdera, *vegeu* Demòcrit
Diocles de Carist, *vegeu* Diocles
Diofant d'Alexandria, *vegeu* Diofant
Dionísodor de Caunos, *vegeu* Dionísodor
Dositeu de Pelusium, *vegeu* Dositeu
Eratòstenes de Cirene, *vegeu* Eratòstenes
Euclides, *vegeu* Euclides
Èudox de Cnidos, *vegeu* Èudox
Eutoci d'Ascaló, *vegeu* Eutoci
Gemine de Rodes, *vegeu* Gemine
Heró d'Alexandria, *vegeu* Heró
Hiparc de Bitínia, *vegeu* Hiparc
Hipòcrates de Quios, *vegeu* Hipòcrates de Quios
Hipsicles, *vegeu* Hipsicles
Lleó, *vegeu* Lleó
Menelau d'Alexandria, *vegeu* Menelau
Nicòmac de Gerasa, *vegeu* Nicòmac
Nicomedes, *vegeu* Nicomedes
Œnòpides de Quios, *vegeu* Œnòpides
Pappos d'Alexandria, *vegeu* Pappos
Ptolemeu, Claudi, *vegeu* Ptolemeu, Claudi
Tales de Milet, *vegeu* Tales
Teó d'Alexandria, *vegeu* Teó d'Alexandria
Teó d'Esmirna, *vegeu* Teó d'Esmirna
Zenòdor, *vegeu* Zenòdor
italians
Borelli, *vegeu* Borelli, Giovanni Alfonso
Campanus de Novara, *vegeu* Campanus de Novara, Giovanni
Fontana, Niccolò, *vegeu* Tartaglia
prussians
Hilbert, *vegeu* Hilbert, David
Jacobi, *vegeu* Jacobi, Carl Gustav Jacob
matemàtiques
catalanes
Bayer, *vegeu* Bayer, Pilar
Sacristán, *vegeu* Sacristán, Vera
gregues
Hipàtia d'Alexandria, *vegeu* Hipàtia
Menelau, XIII, 361
teorema de, 361
Menge, Heinrich, 5, 361

Mersenne, Marin, 361

Newton, Isaac, 359, 361
Nicòmac, XIII, 361
Nicomedes, XIII, 361

Œnòpides, 117, 361

Pappos, XIII, 27, 86, 87, 96, 361
Pèricles, 361, 364
Peyrard, François, 2, 5, 362
Pisano, Nino, 73, 362
Pitàgores, 9, 26, 30, 34, 35, 54, 57, 62, 75, 76, 149, 152, 155, 156, 164, 170, 177, 178, 207, 300, 347, 362
  amb tangram, 30, 62, 152
  teorema de, 9, 26, 30, 34, 35, 54, 57, 62, 75, 149, 152, 155, 156, 164, 170, 177, 178, 207, 300
Plató, 8, 10, 11, 14, 19, 21, 74, 77, 264, 357, 362
  Acadèmia, 8, 180, 362
Playfair, John, 129, 362
Plutarc, Luci Mestri, 356, 358, 362
Porfiri, 62, 107
Procle, 13, 19, 20, 57, 62, 71, 74, 76, 77, 80, 86, 92, 107, 109, 121, 347, 362, 365
Ptolemeu, Claudi, XIII, 2, 350, 359, 360, 362
Ptolemeu I Soter, 362, 363
Ptolemeu II Filadelf, 357, 363
Ptolemeu III Evergetes, 357, 363

Qurra, Thàbit ibn, 4, 363

Ratdolt, Erhard, 4, 353, 363
Russell, Bertrand, 93, 363

Sacristán, Vera, XIII
Saint-Vincent, Grégoire de, 177, 363
Serrat, David, XIV
Sext Empíric, 358, 363
Simson, Robert, 17, 363
Sòcrates, 10, 21, 22, 357, 362, 364, 365

Tales, 48, 54, 55, 65, 69, 75, 76, 101, 121, 156, 264, 300, 304, 316, 317, 364
  teorema de, 48, 54, 55, 65, 69, 101, 156, 264, 300, 304, 316, 317
Tartaglia, *vegeu* Niccolò Fontana
Teetet, 8, 11, 364
Teó d'Alexandria, XIII, 2, 6, 72, 137, 226, 350, 364
Teó d'Esmirna, XIII, 173, 364
Teodor, 8, 11, 364
Teofrast, 358
Teudi, 72, 364
Todhunter, Isaac, 187, 364
at-Tussí, Nàssir-ad-Din, 4, 364

Vaqué, Josep, XII
Varró, Marc Terenci, 3, 364
Vera, Francisco, 84
Vitrac, Bernard, 84, 186, 273

Xenòcrates, 96, 364

Zenó de Sidó, 19, 355, 365
Zenòdor, XIII, 350, 365

Índex de citacions

ANÒNIM
papir d'Oxirrinc, 3
ARISTÒTIL
Analítics primers (Ἀναλυτικὰ Πρότερα)
llibre I 24, 41b 1-41b 22, 185
Analítics segons (Ἀναλυτικὰ Ὕστερα)
llibre I 10, 76 b 9, 214
llibre II 7, 15
llibre II 17, 99 a 13, 301
De l'Ànima (Περὶ ψυχῆς)
llibre II 2, 413 a 19, 180
Metafísica (Τὰ μετὰ τὰ φυσικὰ)
llibre I, 981 a 23–31, IX
——, 981 b 7–10, IX
——, 986 a, 80
——, 996 b 21, 180
llibre V 13, 1020 a 10 i 12, 48, 266
Meteorologia (Μετεωρολογικὰ)
llibre III, capítol 5, 240
llibre ——, 376 a 11-14, 287
llibre ——, 376 a 22-24, 289
ARQUIMEDES
Sobre l'esfera i el cilindre (*Περὶ κονοειδοεων καὶ Σφαιροδεων*), 266
postulat, 266
BOYER, Carl Benjamin
Una història de la matemàtica (*A History of Mathematics*), 6
BUNT, Lucas N. H., JONES, Phillip S. i BEDIENT, Jack D.,
Arrels històriques de la matemàtica elemental (*The Historical Roots of Elementary Mathematics*), 94

CAVEING, Maurice
Introduction Général, a VITRAC (1990), 15
CICERÓ, Marc Tul·li
Tusculanes (*Tusculanæ Disputationes*), 3

DIEC
Diccionari de la llengua catalana de l'Institut d'Estudis Catalans, 2, 7, 91, 100, 155

EINSTEIN, Albert
Geometria i Experiència (*Geometrie und Erfahrung*), 1
«Sobre la metodologia de la física teòrica» («Zur Methodik der theoretischen Physik»), XI

Eliot, Thomas Stearns
Què és un clàssic? (*What is a Classic?*), 7
Euclides
Elements (Στοιχεῖα)
Di 1, 15, 77
Di 2, 15, 77
Di 3, 12, 15, 77, 78
Di 4, 15, 77, 78, 102
Di 5, 16, 77
Di 6, 16, 77
Di 7, 16, 77, 88
Di 8, 16, 38, 78, 92
Di 9, 16, 78
Di 10, 14, 16, 78, 102, 103
Di 11, 16, 78
Di 12, 16, 78
Di 13, 16, 77, 78
Di 14, 16, 79
Di 15, 16, 79, 182, 184, 187
Di 16, 16, 79, 182, 187
Di 17, 17, 79, 182, 183, 222
Di 18, 17, 79
Di 19, 17, 80
Di 20, 17, 60, 80, 96
Di 20′, 60, 96
Di 21, 17, 60, 80
Di 22, 17, 60, 62, 80, 131, 135, 156, 159
Di 23, 18, 81, 124
Dii 1, 18, 32, 156
Dii 2, 18, 32, 157
Diii 1, 17, 37, 183
Diii 2, 37, 183, 210
Diii 3, 184
Diii 4, 184
Diii 5, 184
Diii 6, 37, 184
Diii 7, 38, 185, 186, 224
Diii 8, 38, 185, 186, 224, 227
Diii 9, 185
Diii 10, 38, 186
Diii 11, 38, 186, 215
Div 1, 44, 239
Div 2, 44, 239
Div 3, 43, 44, 239
Div 4, 43, 44, 239
Div 5, 43, 44, 240
Div 6, 43, 44, 240
Div 7, 44, 238, 240
Dv 1, 48, 265
Dv 2, 48, 265, 270, 273
Dv 3, 49, 266
Dv 4, 25, 49, 266
Dv 5, 49, 266, 267, 274, 350
Dv 6, 49, 267
Dv 7, 49, 267, 280
Dv 8, 49, 267
Dv 9, 49, 268
Dv 10, 49, 268
Dv 11, 49, 268
Dv 12, 49, 50, 268
Dv 13, 49, 50, 268
Dv 14, 49, 50, 268, 269
Dv 15, 49, 50, 269
Dv 16, 49, 50, 269
Dv 17, 49, 50, 269
Dv 18, 49, 50, 269
Dvi 1, 67, 301
Dvi 2, 301
Dvi 3, 302
Dvi 4, 53, 134, 302
Dxi 11, 78
Ei 1, 13, 14, 17, 19, 26, 27, 39, 46, 60, 86, 89, 90, 113, 118, 147, 148, 201, 241
Ei 1 a 26, 26
Ei 2, 13, 14, 19, 27, 82, 89, 102, 113, 118, 182, 183, 238, 240, 279
Ei 3, 13, 14, 27, 90, 102, 113, 144, 240, 279

EI 4, 19, 23, 26, 27, 60, 82, 86, 91, 94, 96, 124, 149, 158, 187, 217
EI 5, 24, 27, 38, 94, 96, 113, 185
EI 6, 27, 93, 96
EI 6′, 60, 96
EI 7, 60, 88, 97, 99
EI 8, 23, 26, 27, 80, 94, 98, 99, 118, 217
EI 9, 13, 14, 24, 27, 28, 46, 89, 100, 241
EI 10, 13, 14, 27, 28, 45, 89, 101, 183
EI 11, 13, 14, 27, 28, 89, 102, 104, 129, 248
EI 11′, 104, 130
EI 12, 13, 14, 27, 28, 103, 104, 129, 189, 212
EI 12′, 104, 130
EI 13, 28, 78, 105, 130, 318
EI 14, 28, 62, 78, 92, 106, 187, 318
EI 15, 13, 28, 105, 108
EI 15, porisma, 109
EI 16, 28, 109
EI 17, 28, 60, 61, 83–85, 105, 110
EI 18, 28, 111
EI 19, 28, 92, 112
EI 19, porisma, 327
EI 20, 28, 113, 116
EI 21, 114
EI 22, 13, 14, 26–29, 116, 118, 189
EI 23, 13, 14, 23, 28, 29, 117, 128
EI 24, 29, 64, 118
EI 25, 29, 120
EI 26, 23, 26, 27, 121
EI 27, 26, 28, 29, 123
EI 27 a 31, 26
EI 28, 26, 29, 124
EI 29, 20, 26, 28, 29, 123, 126
EI 30, 26, 29, 127
EI 31, 13, 14, 26, 28, 104, 128
EI 31′, 104, 127–129
EI 32, 14, 26, 29, 75, 130, 131, 226, 307
EI 32, porisma, 14
EI 33, 18, 26, 29, 80, 81, 131
EI 33 a 48, 26
EI 34, 18, 29, 80, 81, 132, 147, 153
EI 35, 18, 134, 136, 147, 153, 158, 302
EI 35 a 38, 29
EI 36, 18, 135, 137, 300, 302
EI 37, 29, 136, 140, 302
EI 38, 29, 137, 300, 302
EI 39, 29, 138
EI 40, 29, 139, 238
EI 41, 29, 67, 138, 140, 149
EI 42, 13, 14, 30, 141
EI 43, 30, 64, 81, 142, 143, 157, 163
EI 44, 13, 14, 30, 143, 146, 154, 155, 322
EI 45, 13, 14, 30, 35, 145, 180
EI 46, 13, 14, 24, 30, 147, 248, 322
EI 47, 30, 35, 63, 64, 69, 75, 149, 153, 159, 177, 347
EI 48, 26, 30, 75, 149, 152
EII 1, 32, 33, 63, 154, 157, 159, 160, 168, 238
EII 2, 32, 33, 63, 154, 159
EII 3, 32, 33, 63, 154, 159
EII 4, 32, 33, 63, 154, 160, 167, 168, 170, 171

EII 4, porisma, 162
EII 5, 3, 32, 33, 34, 44, 63, 154, 155, 162, 182, 232
EII 6, 32–34, 44, 63, 64, 154, 155, 164, 175, 182, 232
EII 7, 32, 33, 64, 78, 154, 166, 167, 170, 171
EII 8, 32, 33, 64, 154, 167
EII 9, 32, 33, 64, 154, 170, 176, 180, 238
EII 10, 32, 33, 64, 154, 170, 173, 176, 180, 238
EII 11, 13, 34, 44, 45, 53, 64, 155, 175, 252, 302, 346
EII 12, 34, 64, 69, 155, 170, 177, 178, 238
EII 13, 34, 64, 69, 155, 170, 177, 178, 238
EII 14, 13, 54, 64, 145, 155, 180, 315
EIII 1, 36, 38, 64, 186, 240, 241, 248, 261
EIII 1, porisma, 186, 188
EIII 2, 37, 38, 64, 188
EIII 3, 37, 38, 190
EIII 4, 37, 38, 191
EIII 5, 37, 38, 39, 191
EIII 6, 37–39, 78, 192
EIII 7, 12, 37–39, 64, 65, 193
EIII 8, 37–39, 195
EIII 9, 38, 39, 198
EIII 10, 38–40, 199, 216
EIII 11, 13, 38, 40, 201
EIII 12, 37, 38, 40, 202
EIII 13, 37, 38, 40, 188, 203
EIII 14, 37–39, 184, 189, 204
EIII 15, 37–39, 184, 206, 238, 240
EIII 16, 37, 38, 40, 78, 185, 208, 210, 211
EIII 16, porisma, 13, 210
EIII 17, 13, 38, 40, 210
EIII 18, 37, 38, 40, 211, 212
EIII 19, 38, 40, 212
EIII 20, 37, 38, 40, 92, 213
EIII 21, 38, 40, 185, 214
EIII 22, 38, 40, 41, 215, 231
EIII 23, 37, 38, 41, 215–217
EIII 24, 17, 38, 41, 94, 217
EIII 25, 13, 37, 38, 41, 184, 218
EIII 26, 38, 41, 220
EIII 27, 38, 41, 221, 223, 350
EIII 28, 38, 41, 221, 223
EIII 29, 37, 38, 41, 222, 223
EIII 30, 13, 37, 38, 41, 223
EIII 31, 17, 38, 41, 65, 224, 231
EIII 31, porisma, 226
EIII 32, 38, 41, 78, 185, 226, 229
EIII 32, porisma, 229
EIII 33, 13, 37, 38, 41, 228
EIII 34, 13, 37, 38, 41, 65, 231, 249
EIII 35, 37, 38, 41, 65, 182, 232
EIII 36, 38, 41, 65, 182, 233
EIII 37, 37, 38, 41, 45, 65, 182, 236
EIV 1, 44, 45, 185, 238, 240
EIV 2, 45, 92, 241
EIV 3, 45, 65, 242
EIV 4, 45, 65, 66, 244

EIV 5, 45, 186, 245
EIV 5, porisma, 13, 247
EIV 6, 45, 248, 261
EIV 7, 45, 249
EIV 8, 45, 250
EIV 9, 45, 251
EIV 10, 44, 45, 175, 238, 252
EIV 11, 44, 45, 236, 238, 252, 254
EIV 12, 45, 255
EIV 13, 45, 258
EIV 14, 45, 260
EIV 15, 46, 241, 260
EIV 15, porisma, 13, 263
EIV 16, 46, 263
EIV 16, porisma, 264
EV 1, 51, 270, 276
EV 2, 51, 66, 271, 272
EV 3, 51, 273
EV 4, 51, 66, 272, 274
EV 5, 51, 275
EV 6, 51, 66, 276
EV 7, 51, 66, 268, 272, 277, 282, 306, 322
EV 7, porisma, 13, 278
EV 8, 51, 66, 266, 279, 282
EV 9, 51, 277, 282
EV 10, 51, 282
EV 11, 51, 284, 306, 322
EV 12, 51, 284, 285
EV 13, 51, 66, 272, 286
EV 14, 51, 287
EV 15, 51, 288
EV 16, 51, 268, 289
EV 17, 51, 269, 290
EV 18, 51, 268, 292
EV 19, 51, 66, 272, 293
EV 19, porisma, 13, 269, 293
EV 20, 51, 293
EV 21, 51, 294
EV 22, 50, 51, 269, 295
EV 23, 50, 51, 269, 297
EV 24, 52, 66, 272, 298
EV 25, 52, 66, 299
EVI 1, 53, 300, 302
EVI 2, 54, 101, 300, 304, 316
EVI 3, 54, 67, 305
EVI 4, 54, 186, 241, 307
EVI 5, 54, 308
EVI 6, 54, 309
EVI 7, 54, 311
EVI 8, 35, 54, 149, 313
EVI 8, porisma, 13, 314, 318
EVI 9, 13, 54, 315
EVI 10, 13, 25, 54, 101, 316
EVI 11, 13, 54, 55, 282, 300, 317
EVI 12, 13, 25, 54, 55, 156, 282, 292, 300, 317
EVI 13, 13, 54, 55, 180, 300, 318
EVI 14, 55, 67, 319, 322
EVI 14, porisma, 322
EVI 15, 55, 67, 300, 320
EVI 16, 55, 321, 323
EVI 17, 55, 323
EVI 18, 13, 55, 67, 301, 324
EVI 19, 13, 55, 67, 162, 300, 326
EVI 19, porisma, 13, 55, 327
EVI 20, 13, 55, 67, 162, 300, 327, 332, 334
EVI 20, porisma, 13, 331
EVI 21, 55, 300, 331
EVI 22, 332, 343
EVI 23, 55, 334
EVI 24, 55, 301, 335
EVI 25, 13, 55, 301, 337
EVI 26, 57, 338
EVI 27, 55, 57, 299, 340, 342

EVI 28, 13, 55, 57, 147, 301, 340, 341
EVI 29, 13, 55, 57, 147, 301, 344
EVI 30, 13, 55, 67, 175, 252, 300, 346
EVI 31, 55, 57, 300, 347
EVI 32, 68, 349
EVI 33, 53, 57, 221, 301, 350
EVII 2, 13
EVII 2, porisma, 13
EVII 3, 13
EVII 33, 13
EVII 34, 13
EVII 35, 13
EVII 36, 13
EVII 39, 13
EVIII 2, 13
EVIII 2, porisma, 13
EVIII 4, 13
EIX 11, porisma, 13
EX 1, 363
EX 2, 13, 267
EX 3, 13, 267
EX 3, porisma, 13
EX 4, 13, 267
EX 4, porisma, 13
EX 6, 25
EX 6, porisma, 13
EX 9, lema, 13
EX 9, porisma, 13
EX 10, 13
EX 14, lema, 13
EX 17, lema, 13
EX 19, lema, 13
EX 22, lema, 13
EX 23, porisma, 13
EX 27, 13
EX 28, 13
EX 29, 13
EX 29, lema, 13
EX 30, 13
EX 31, 13
EX 32, 13
EX 33, 13
EX 33, lema, 13
EX 34, 13
EX 35, 13
EX 41, lema, 13
EX 48, 13
EX 49, 13
EX 50, 13
EX 51, 13
EX 52, 13
EX 53, 13
EX 54, lema, 13
EX 60, lema, 13
EX 85, 13
EX 86, 13
EX 87, 13
EX 88, 13
EX 89, 13
EX 90, 13
EXI 3, 86
EXI 11, 13
EXI 12, 13
EXI 22, 13
EXI 23, 13
EXI 26, 13
EXI 27, 13
EXI 28, 132
EXI 29, 134
EXI 33, porisma, 13
EXII 1, 327
EXII 2, 25, 282, 327, 350
EXII 2, lema, 13
EXII 4, lema, 13
EXII 7, porisma, 13
EXII 8, porisma, 13
EXII 16, 13
EXII 17, 13
EXII 17, porisma, 13
EXII 18, 25, 282
EXIII 2, lema, 13
EXIII 13, 13

Exiii 13, lema, 13
Exiii 14, 13
Exiii 15, 13
Exiii 16, 13
Exiii 16, porisma, 13
Exiii 17, 13, 349
Exiii 17, porisma, 13
Exiii 18, 13, 238
Exiii 18, lema, 13
Nc 1, 85, 86, 88, 127, 135, 273, 284, 306
Nc 1′, 85
Nc 2, 85, 86, 108, 142, 158, 194, 273
Nc 2′, 85
Nc 3, 85, 86, 194
Nc 3′, 85
Nc 4, 12, 18, 85, 86, 93, 94, 99, 100, 129, 217
Nc 4′, 85, 194
Nc 5, 85, 86, 112, 265
Nc 5′, 86, 108
Nc 6′, 86, 222
Nc 7′, 86, 94
Nc 8′, 86
Nc 9′, 23, 86, 124
P 1, 18, 19, 81–83, 118, 127, 148, 241, 243, 322, 334
P 1′, 19, 60
P 2, 19, 27, 79, 81–83, 103, 128, 144, 148, 183, 241
P 2′, 19, 60
P 3, 18, 27, 81–83, 89, 148, 182, 186, 259
P 4, 12, 20, 23, 78, 81, 83, 86
P 5, 12, 18–20, 24, 26, 28, 29, 39, 60–62, 80, 81, 83, 84, 101, 123, 125, 127, 145, 147, 149, 156, 161, 199, 218, 246, 250, 256, 306, 319, 334

Porismes (Πορισμάτων Βιβλία), 109

Sobre les divisions Περὶ διαιρέσεων βιβλίον), 186

GDLC

Gran diccionari de la llengua catalana d'Enciclopèdia Catalana, 2

Hardy, Godfrey Harold

Apologia d'un matemàtic (*A Mathematician's Apology*), v

Heath, Sir Thomas Little

Els tretze llibres dels 'Elements' d'Euclides (*The Thirteen Books of Euclid's Elements*), 85

Papir d'Oxirrinc, 3

Plató

Càrmides (Χαρμίδης), 21, 22

Eutidem (Εὐθύδημος), 290 b 5-290 c 5, 10, 11

La República (Πολιτεία), ii 525 d-526 a, 77

Sofista (Σοφιστής), 245 a, 77

Procle

Comentaris al llibre primer dels Elements d'Euclides (Σχόλια στο πρώτον βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη), 71, 74, 76, 77, 83, 86, 87

Índex d’indrets

Acadèmia (Ἀκαδήμεια) de Plató, 8, 180, 362

biblioteques
- d’Alexandria, *vegeu* ciutats egípcies
- del Vaticà, *vegeu* ciutats italianes

Casa de la Saviesa (Bayt al-Hikma), *vegeu* ciutats perses

ciutats
- alemanyes
  - Aquisgrà, 361
  - Augsburg, 363
  - Bamberg, 356
  - Berlín, 360
  - Brunsvic, 357, 358
  - Göttingen, 359, 360
  - Königsberg, 360
  - Leipzig, 5
  - Potsdam, 360
- anatòliques
  - Bitínia (Βιθυνία), *vegeu* ciutats gregues
  - Calcedònia (Χαλκηδών), *vegeu* ciutats gregues
  - Caunos (Καῦνος), *vegeu* ciutats gregues
  - Cilícia (Κιλικία), *vegeu* ciutats gregues
  - Clazòmenes (Κλαζομεναί), *vegeu* ciutats gregues
  - Cnidos (Κνίδος), *vegeu* ciutats gregues
  - Elea (Ἐλέα), *vegeu* ciutats gregues
  - Esmirna (Σμύρνα), *vegeu* ciutats gregues
  - Halicarnàs (Ἁλικαρνασσός), *vegeu* ciutats gregues
  - Làmpsac (grec: Λάμψακος; turc: Lapseki ilçesi; llatí: Lampsacus), *vegeu* ciutats gregues
  - Nicea (Νίκαια), *vegeu* ciutats gregues
  - Perge (Πέργη), *vegeu* ciutats gregues
- angleses
  - Bath, 4, 355, 359
  - Berkshire, 359
  - Cambridge, 364
  - Kensington, 361
  - Londres, 358
  - Rye, 364
  - Woolsthorpe-by-Colsterworth, 361
- àrabs
  - la Meca, 361
- belgues
  - Bruges, 363
  - Gant, 363

bizantines
Constantinoble (llatí: Constantinopolis; grec: Κωνσταντινούπολη; turc otomà: Ḳosṭanṭīnīye), 355, 360, 362
Tral·les (Τράλλεις), 355, 360
daneses
Aalborg, 360
Copenhaguen, 360
egípcies
Alexandria (Ἀλεξάνδρεια), XIII, 2, 4, 6, 72, 137, 226, 350, 357, 358, 360, 361, 363, 364
Biblioteca, 4, 363
far, 363
Museu, 4, 363
Oxirrinc (Οξύρυγχος), 3
escoceses
Aberdeen, 359
Angus, 362
Burntisland, 362
Glasgow, 363, 364
West Kilbride, 363
franceses
La Haye en Touraine, 357
Lilla, 357
Oizé, 361
París, 5, 357, 361, 362
Sant Victor de Malascorts, 362
gal·leses
Penrhyndeudraeth, 363
Trellech, 363
gregues
Abdera (Ἄβδηρα), 357
Atenes (Ἀθῆναι), 357–362, 364, 365
Bitínia (Βιθυνία), 360, 364
Calcedònia (Χαλκηδών), 96, 364
Carist (Κάρυστος), 357
Caunos (Καῦνος), 358
Cilícia (Κιλικία), 357
Cirene (Κύρηνη), 358, 364
Clazòmenes (Κλαζομεναί), 355
Cnidos (Κνίδος), 265, 267, 358
Colonos (Κολωνός), 358
Crotona (Κρότων), 356
Delfos (Δελφοί), 362
Elea (Ἐλέα), 365
Esmirna (Σμύρνα), XIII, 173, 364
Estagira (Στάγιρα), 356
Gerasa (Γέρασα), 361
Halicarnàs (Ἁλικαρνασσός), 360
Làmpsac (grec: Λάμψακος; turc: Lapseki ilçesi; llatí: Lampsacus), 355
Metapont (Μεταπόντιον), 362
Milet (Μίλητος), 2, 360, 364
Nicea (Νίκαια), 360
Pelusium (Πηλούσιον), 358
Perge (Πέργη), 356
Queronea (Χαιρώνεια), 362
Siracusa (grec: Συράκουσα; llatí: Sarausa), 356
Turis (Θούριοι), 360
iranianes
Raga, 359
Tus (persa: Tōs; àrab: Tūs), 359, 364
iraquianes
Kadhimiya (al-Kāżimayn), 364
israelianes
Ascaló (Ασχαλων), 358
italianes
Arpinum, 356
Brescia, 359

Crotona, *vegeu* ciutats gregues
Formia, 356
Metapont, *vegeu* ciutats gregues
Nàpols, 356
Novara, 4, 356
Pavia, 356
Pisa, 362
Reate, 364
Roma, 356, 359, 364
Siracusa, *vegeu* ciutats gregues
Turis, *vegeu* ciutats gregues
Vaticà, 3, 5
Biblioteca del, 5
Venècia, 4–6, 353, 359, 363
Viterbo, 356
jordanes
al-Humayma, 361
libaneses
Sidó (grec: Σιδών; àrab: Ṣaydā; fenici: Ṣdn; hebreu bíblic: Ṣīḏōn; turc: Sayda), 19, 355, 365
líbies
Cirene (Κύρηνε), *vegeu* ciutats gregues
nord-americanes
Saint Louis, 358
numídies
Hipona, 3, 355
Tagaste, 355
perses
Bagdad (Baġdād), 4, 359, 361, 363
Casa de la Saviesa (Bayt al-Hikma), 4
romanes
Reate, *vegeu* ciutats italianes
Roma, *vegeu* ciutats italianes
sirianes
Gerasa, *vegeu* ciutats gregues
sueques
Estocolm, 357
turques
Harran, 363
txeques
Praga, 356

illes gregues
Eubea (Εὔβοια), 356
Kos (Κῶς), 363
Quios (Χῖος), 11, 36, 57, 63, 67, 72, 117, 220, 247, 348, 350, 360, 361
Rodes (Ρόδος), 358, 359
Samos (Σάμος), 356, 357, 362
Institut d'Estudis Catalans (IEC), xiv

Liceu (Λύκειον) d'Aristòtil, 8, 356

muntanyes gregues
Muníquia (grec: Μουνιχία; llatí: Munychia), 357
museus
d'Alexandria, *vegeu* ciutats egípcies
dell'Opera del Duomo (Florència), 353

Occident, 154
Organització per a la Cooperació i el Desenvolupament Econòmic (Organisation de Coopération et de Développement Économiques, OCDE), 71
Organització Europea per a la Cooperació Econòmica

(Organisation Européenne de Coopération Économique, OECE), 71

països
- Alemanya, 356, 357, 359–361, 363
- Anglaterra, 355, 358, 359, 361, 364
- Aràbia, 361
- Bèlgica, 363
- Bizanci, 355
- Dinamarca, 360
- Egipte (Αἰγυπτός), 3, 358, 360–364
- Escòcia, 359, 362, 363
- Estats Units d'Amèrica, 358
- França, 357, 361, 362
- Gal·les, 363
- Grècia (Ἐλλάς o Αρχαία Ελλάδα), XI, 4, 20, 356–358, 360–365
- Iran, 359, 364
- Iraq, 363, 364
- Itàlia, 356, 359, 362–365
- Jordània, 361
- Líban, 365
- Líbia, 364
- Lídia (Λυδία), 355
- Numídia (grec: Νομαδία; llatí: Numidia), 355
- Prússia, 360
- República Txeca, 356
- Síria, 361
- Turquia, 358, 360, 362–364

regions gregues
- Magnèsia (Μαγνησία), 364

Índex de mots i formes grecs i llatins

grecs
ἀγαγεῖν, 82
αἱ *ΒΑΓ*, 92
αἱ *ΒΑ*, *ΑΓ*, 92
αἱ ἐκ τῶν κέντρων, 82, 183
αἰτήματα, 18, 74, 81
αλλὰ καὶ τὴν αἰτία, 183
ἄλληλα λόγος, *vegeu* λόγος
ἀλλήλαις, 83
ἄλλο δέ τι, ὅ ἔτυχεν, 278
ἀμβλεῖα, *vegeu* γωνία, 78
ἀμβλυγώνιον, 80
ἀναγράφειν ἀπό, 147
ἀνάλογία, 267
ἀνάλογον, 267, 316
ἀνάλογος, 268
ἀνάπαλιν λόγου, *vegeu* λόγος
ἀναστροφὴ λόγος, *vegeu* λόγος
ἀνίσους, 80
ἀντιπεπονθότα, δέ σχήματά έστιν, ὅταν ἐν ἑκατερῳ τῶν σχημάτων ἡγούμενοί τέ καὶ ἑπομενοι λόγοι ὦσιν, 301
ἄπειρον, 81, 83
vegeu είς i επ΄ ἄπειρον
ἀπεναντίον, 109
ἀπέχειν, 184
ἀπλάτές, 77
ἀποδειςις, 87
ἀπολαμβάνειν, 185
ἀπολαμβανομένης, 79
ἁπσώ ἐφάψεται τῶ γωνιῶν, 240
ἅπτεσθαι, 183
ἅπτηται, 239
ἁπτομένη τοῦ κίκλου καὶ ἐκβαλλομένη οὐ τέμνει τὸν κίκλον, 183
αὐτὰ μέρη, 125
βάσις, 91
βεβηκέναι, 185
γνώμων, 157
γραμμὴ, 77
γωνία, 78, 108
ἀμβλεῖα, 78
ἐκτός, 109, 124
ἐνκτός, 109, 124
ἐφεξες, 78, 108
ἡ ὑπώ τῶν *ΒΑ*, *ΑΓ* περιεχομένην, 92
κορυφῆς, 108
ὄρθαὶ, 78
ὄρθὴ, 78
ὀξεῖα, 78
περιεχομένη, 99

γωνίας
δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, 83
ἑκάτης, 239
τὰς ἐναλλὰξ, 123
δεδομένης περιφερείας ἐφάψεται τὸ N, 239
δί ἴσου, 269, 273
δί ἴσου λόγος, *vegeu* λόγος
διά, 183
διαγώνιος, 132
διαίρεσις λόγος, *vegeu* λόγος
διάμετρος, 79, 132, 157
διαστήνατι, 82
διηρημένη, 267
διήχθω, 109
διορισμός, 87
διπλασίονα λόγον, *vegeu* λόγος
διπλασίος, 326
διπλασίος λόγος, *vegeu* λόγος
διπλασίων, 326
διπλασίων λόγος, *vegeu* λόγος
διστήματι δὲ τῷ $Z\Delta$, 117
διχα τεμεῖν, 79, 100
ἐγγράφεσθαι, 239
είναι, 15
εἰς
ἄπειρον, 81
δύο εὐθείας ἐμπίπτουσα, 123
τὸν δοθέντα κύηλον πεντάγωνον ἰσοπλερόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψψαι, 254
ἑκατέρα. . . ἑκατερα, 91
ἑκάτης
γωνιας, 239
πλευράς, 239
ἐκβεβλήσθω, 109
ἔκθεσις, 87 subsubitem γωνία, *vegeu* γωνία
ἐλακιετος, 267
ἔλλειψις, 33, 154
ἐν τμήματι δὲ γωνία, 38
ἐναλλὰξ λόγον, *vegeu* λόγος
ἐναρμόζεσθαι, 240
ἐντός, 114
γωνία, *vegeu* γωνία
καὶ ἀπεναντίον, 124
συσταθῶσιν, 114
ἐξ ἴσου, 77
ἐπ΄ ἄπειρον, 81
ἐπ᾽ εὐθεῖαν τὴν, 108
επαφῆ, 202
ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, 83
ἐπιζευγνύουσαι, 131
τῆς AB, 103
ἐπὶ τὰς B, Δ μέρη ἢ ἐπιὶ τὰ A, Γ, 124
ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείον, ὅ μή ἐστιν ἐπ᾽ αὐτῆς, καθετον εὐθεῖα γραμμὴν ἀγαγεῖν, 103
ἐπίπεδον ἐπιφάνειά, 78
ἐπιφάνεια, 77
ἕς ον ἀπέχειν ἀπὸ τοῦ κέντρον, 184
ἑτερόμηκες, 80, 156
εὐθεῖα κύκλου ἐφάπτεσθαι λέγεται, ἥτις ἁπτομένη τοῦ κύκλου καὶ ἐκβαλλομένη οὐ τέμνει τὸν κύκλον, 183
εὐθεῖας
ἄπειρον, 103
πεπερασμένη, 86
εὐθύγραμμά, 80
εὐθύγραμμον, 146
εὐθύγραμμος, 78
ἐφ΄ ἑκάτερα
τὲ μέρη, 81
τῆς ἐλαχ΄ἕς της, 193
ἐφαμόζειν, 85

ἐφάπτεσθαι, 37, 183, 239
ἐφαρμόζεσθαι, 85
ἐφαρμόζοντα, 85
ἐφαρμόσειν, 92
ἐφεξῆς, *vegeu* γωνία, 78
ἡ δὲ πρὸς τῷ α γωνία *A*, 119
ἡ ἐφαπτομένε͂, 211
ἡ ὑπώ τῶν *BA*, *AΓ* περιεχομένην γωνία, *vegeu* γωνία
ἠιτήσθω, 82
ἠμικλύκιον, 79
ἴσας, 83
ἰσόπλευρον, 80
ἰσοσκὲλες, 80
ἱστορία, 360
καθ᾿ ὀποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν, 267
κάθετος, 78, 302
καὶ γεγονέτω ὡς μὲν ἡ *BΓ* πρός τὴν *ΓH*, οὕτως ἡ *K* πρὸς τὴν *Λ*, ὡς δὲ ἡ *BΓ* πρὸς τὴν *ΓE*, οὕτως ἡ *Λ* πρὸς τὴν *M*, 334
καταγεγράφθω
  διπλοῦντὸ σχῆμα, 166
  τὸ σχῆμα, 166
κατὰ τὸ συνεχὲς, 82
κατασκευή, 87
κεῖμαι, 91
κείσθαι, 102
κεῖται, 77
κλεκάσθαι, 214
κεκλάσθω δὴ πάλιν, 214
κέντρον, 79
κλάõ, 214
κλίσις, 78
κοίλην περιφέρειαν, 195, 196
κοιναὶ ἔννοιαι, 21, 75, 84
κοινὴ προσκείσθω ἣη ὑπο *ABΓ*, 106
κορυφῆς, 108
  vegeu γωνία
κὺκλον περιφερείας, 184
κύκλος, 79, 199, 263
κυρτὴ περιφέρειαν, 196
λέγω, 92
λῆψις τῶν ἄκρων καθ᾿ ὑπεξαίρεσιν τῶν μέρων, 269
λόγος, 266
  ἄλληλα, 334
  ἀνάπαλιν, 50, 268
  ἀνάστροφὴ, 50, 269
  δί ἴσου, 50, 269
  διαίρεσις, 269
  διπλασίονα, 268
  διπλασίος, 326
  διπλασίων, 326
  ἐναλλὰξ, 50, 268
  ὁριστικός, 183
  σύνθεσις, 50, 268
  τεταραγμένῃ, 50
  τριπλασίονα, 268
μέγεθος, 265
μεγιστη, 191
μεῖζον, 85
μέρος, 77, 265
μέρους, 85
μὴ ἐπὶ τὰ αὐτα μέρη, 106
ὅ μή ἐστιν ἑπ᾿ αὐτῆς, 103
οἱ ἀρχαῖοι, 130
ὅλον, 85
ὀμογενῶν, 266
ὅμοια, 186
  τμήματα κύκλων, 38, 186
ὁμόλογος, 49, 268
ὀξεῖα, *vegeu* γωνία, 78
ὀξυγώνιον, 80
ὅπερ ἔδει
  δείξαι, 201
  ποιῆσαι, 89
ορθαὶ γωμίαι, *vegeu* γωνια
ὄρθὴ, *vegeu* γωνία, 78
ὀρθογώνιον, 80
ὁριστικός, *vegeu* λόγος
ὅροι, 14, 74, 76, 156, 183, 239, 265, 267, 301

ὅρος, 14, 78
ὅταν καταμετρῇ τὸ μεῖζον, 265
ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν *A, ΒΓ* περιεχονένον ὀρθογώνιον, 156, 157
οὐ συσταθήσονται ἐπὶ, 97
παντη μεταλαμβανόμεναι, 110
παραβεβλήεθω γὰρ παρὰ μὲν τὴν *ΒΓ* τῷ *ΑΒΓ* τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ *ΒΕ*, 337
παραβολεῖν, 143
παραβολή, 154, 156
παραλληλόγραμμον, 134
  ὀρθογώνιον, 156
  χωρίου, 157
  χωρίων, 132
παραλληλόγραμμος, 132
παράλληλοί, 81
παραπληρώματα, 142
πεπερασμένην, 82, 101
πέρας, 77
πέρατα, 77
περειέχεσθαι, 156
περειεχομένην, 99
περὶ δὲ τὴν *ΑΓ*, 142
περιγράφεσθαι, 239
περιέθουσαι, 78
περιεχομένη γωνία, *vegeu* γωνία
περιεχόμενον, 79
περιέχουσαι, 78, 156
περιέχω, 99
περιφέρεια, 79, 263
πηλικότης, 266
πλάτος, 77
πλευρὰν τὴν πρὸς ταῖς ἴσαι γωνίαις, 121
πλευράς ἐκτάτες, 239
πολλαπλάσιον, 265
πολύπλευρα, 80
πόρισμα, 109
πρὸς τῇ τομῇ, 109
πρότασις, 87
ῥέμβειν, 80
ῥέμβω, 80
ῥόμβοειδὲς, 80
ῥόμβος, 80
σημεῖόν, 77
σκαληνόν, 80
σκέλος, 80
σταθεῖσα, 78
συμπέρασμα, 87
συναμφοτέρων τῶν *Δ,Μ* μεῖζόν ἐστιν, 280
συναφήν, 201
συνεχής, 267
σύνθεσις λόγον, *vegeu* λόγος
συστήσασθαι, 147
σχέματα
  εὐθύγραμμά, 80
    πολύπλευρα, 80
    τετράπλευρα, 80
    τρίπλευρα, 80
  τετράπλευρα, 80
    ἑτερόμηκες, 80
    ῥόμβοειδὲς, 80
    ῥόμβος, 80
    τετράγονον, 80
    τραπέζια, 81
  τρίπλευρα
    ἀμβλυγώνιον, 80
    ἰσόπλευρον, 80
    ἰσοσκὲλες, 80
    ὀξυγώνιον, 80
    ὀρθογώνιον, 80
    σκέλος, 80
σχέσις κατὰ πηλεικότθτα, 266
σχῆμα, 79
τὰ καταμετροῦντα, 265
τὰς ἐναλλὰξ γωνίας, 123
τεταραγμένῃ, 50
  λόγος, *vegeu* λόγος
  δὲ ἀναλογία, 269
τετράγονον, 80
τετραγωνισμός, 180

τετράπλευρα, 80
τὴη ὑπο *ΒΑΓ* γωνίᾳ, 91
τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίας τῶν ἴσων γωνιῶν, 121
τμῆμα κύκλου, 37, 184
τμήματος δὲ γωνία, 38, 185
τὸ ὅμοιον, 301
τὸ ὅτι, 15, 183
τομεὺς δὲ κύκλου, 38, 186
τομή, 163
τοσαυταπλάσιον γεγονέτω καὶ τὸ *EB* τοῦ *CG*, 275
τραπέζια, 81
τραπέζιον, 81
τριπλασίονα λόγον, 268
τρίπλευρα, 80
τυχὸν σημεῖον τὸ, 94, 102
ὑπερβολή, 33, 154
ὑπόκειται ἴση, 122
ὑποτείνουσιν, 91
ὕψος, 53, 134, 302

llatins
alternando, 50, 51, 293, 297, 298, 308, 327, 330, 336, 338
componendo, 50, 51, 290, 292, 299, 336
convertendo, 50, 293
distantia, 50
ex æquali, 50, 273, 293–299, 308, 328, 329, 332, 335, 336
ex æquo, 77
facta intellectuali superpositione, 93
invertendo, 50, 294, 295, 298, 312
more geometricum, 157
mutatis mutandis, 165
permutando, 50
quid nominis, 15
quid rei, 15
quod erat demostrandum (QED), 89
separando, 50, 51, 290, 292, 299

Índex d'obres

ACERBI, Fabio
Euclide. Tutte le opere, 15

ANÒNIM
papir d'Oxirrinc, 3

APOL·LONI
Còniques (Κωνικῶν Βιβλία), 358

ARISTÒTIL
Analítics primers (Ἀναλυτικὰ Πρότέρα), 185
Analítics segons (Ἀναλυτικὰ Ὕστερα), 15, 214, 301
De l'Ànima (Περὶ ψυχῆς), 180
Ètica nicomaquea (Ἠθικά Νικομάχεια), 285
Metafísica (Τὰ μετὰ τὰ φυσικὰ), IX, 48, 80, 180, 266
Meteorologia (Μετεωρολογικὰ), 240, 287, 289

ARQUIMEDES
De les línies espirals (Περὶ ἑλίκων), 358
El Mètode [dels teoremes mecànics] (Περὶ μηχανικῶν θεωρεμάτων πρὸς Ἐρατοσθένη ἔφοδος), 360
De l'esfera i el cilindre (Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου), 266, 358
postulat V, 266

AUTORS DIVERSOS
Bíblia (τα βιβλια), 6
Les mil i una nits (persa, *Hazār-o yak xab*), 359

BOYER, Carl Benjamin
Una història de la matemàtica (*A History of Mathematics*), 6

BUNT, Lucas N. H., JONES, Phillip S. i BEDIENT, Jack D.,
Arrels històriques de la matemàtica elemental (*The Historical Roots of Elementary Mathematics*), 94

CAMPANUS DE NOVARA, Giovanni
Elements de Geometria (*Elementa geometriæ*), 185

CAVEING, Maurice
Introduction Général,a VITRAC (1990), 15

CICERÓ, Marc Tul·li
Tusculanes (*Tusculanæ Disputationes*), 3

CLAVIUS, Christopher
Elements d'Euclides (*Euclidis Elementorum*), 5, 357

DESCARTES, René
Geometria (*Géométrie*), 1, 234

DIEC
Diccionari de la llengua catalana de l'Institut d'Estudis Catalans, 2, 7, 91, 100, 155

Einstein, Albert
Geometria i Experiència (*Geometrie und Erfahrung*), 1
«Sobre la metodologia de la física teòrica» («Zur Methodik der theoretischen Physik»), xi

Eliot, Thomas Stearns
Què és un clàssic? (*What is a Classic?*), 7

Euclides
Dades (Δεδομένα), 5
Elements (Στοιχεῖα), vii, xii–xiv, 1–12, 14, 18, 19, 21, 23, 26, 33, 37, 46, 52, 71–74, 76, 87, 96, 127–129, 138, 153, 155, 172, 184, 185, 239, 263, 264, 296, 324, 353, 359
llibre i, vii, xiii, 8, 9, 11–14, 16, 21, 31, 32, 71, 73–76, 81, 82, 86, 88, 94, 149, 153, 155, 156, 182, 238
definicions, 12, 14–18, 76–81
nocions comunes, 12, 21–25, 84–86
postulats, 12, 18–20, 81–84
proposicions, 26–32, 86–153
llibre ii, vii, xiii, 8, 9, 11–13, 26, 30–33, 35, 36, 71, 73–75, 142, 153, 155–157, 182, 232, 238, 340
definicions, 32, 156–157
proposicions, 32–36, 157–182
llibre iii, vii, xiii, 8, 9, 11–13, 36, 42–44, 71, 73–75, 182, 183, 232, 238
definicions, 37–38, 183–186
proposicions, 38–43, 186–237
llibre iv, vii, xiii, 8, 9, 11–13, 43, 46, 47, 71, 73–75, 147, 223, 237–239
definicions, 44, 239–240
proposicions, 44–47, 240–264
llibre v, vii, xiii, 8, 9, 11, 12, 24, 47, 48, 50–52, 71, 73, 77, 157, 239, 264, 265, 270, 300
definicions, 48–49, 265–269
proposicions, 49–52, 270–300
llibre vi, vii, xiii, 8, 9, 11, 12, 34, 35, 45, 47, 48, 53, 57, 71, 73, 149, 156, 180, 186, 239, 264, 300–302
definicions, 53, 301–302
proposicions, 53–59, 302–352
llibre vii, xiii, 8, 9, 11, 12, 50, 73, 77, 157, 239, 267
llibre viii, xiii, 8, 9, 11, 12, 73, 239, 267
llibre ix, xiii, 8, 9, 11, 12, 73, 239, 267
llibre x, xiii, 11, 12, 51, 73, 92, 156, 239, 264
llibre xi, xiii, 8, 11, 12, 73, 92, 94, 134, 239

llibre XII, XIII, 8, 11, 12, 48, 73, 92, 239, 363
llibre XIII, XIII, 9, 11, 12, 73, 92, 238, 239
llibre XIV, 2
llibre XV, 2
Porismes (Πορισμάτων Βιβλία), 109
Sobre les Divisions (Περὶ διαιρέσεων βιβλίον), 186

EUTOCI
Comentaris a, 358
Còniques d'Apol·loni
De l'esfera i el cilindre
La quadratura del cercle

GDLC
Gran diccionari de la llengua catalana d'Enciclopèdia Catalana, 2

HARDY, Godfrey Harold
Apologia d'un matemàtic (*A Mathematician's Apology*), V

HEATH, Sir Thomas Little
Els tretze llibres dels 'Elements' d'Euclides (*The Thirteen Books of Euclid's Elements*), 57, 84, 85, 87, 157, 202

HEIBERG, Johan Ludvig i MENGE, Heinrich
L'obra completa d'Euclides (*Euclidis opera omnia*), 5, 21, 79, 84, 137

KAYAS, Georges J.
Euclides. Les Éléments, 84

LLEÓ
Elements (Στοιχεῖα), 361

MARCHINI, Carlo
Appunti di Geometria classica, 238

PAPIR D'OXIRRINC, 3

PEYRARD, François
Còdex grec del Vaticà (*Codex Vaticanus græcus, 190*), 3, 5, 362

PLATÓ
Càrmides (Χαρμίδης), 21, 22
Diàlegs socràtics (Σωκρατικός λόγος), 362
Eutidem (Εὐθύδημος), 10, 11
La República (Πολιτεία), 77
Sofista (Σοφιστής), 77

PLUTARC, Luci Mestri
Vides paral·leles (Βίοι Παράλληλοι), 362

PROCLE
Comentaris al llibre primer dels Elements d'Euclides (Σχόλια στο πρώτον βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη), 13, 71, 74, 76, 77, 80, 83, 86, 87, 92

PTOLEMEU, Claudi
Almagest, 2, 350, 359
Sintaxi Matemàtica (Μαθηματικὴ Σύνταξις), *vegeu Almagest*

SAINT-VINCENT, Grégoire de
Obra geomètrica de la quadratura del cercle amb seccions còniques (*Opus geometricum quadraturæ circuli et sectionum coni*), 177, 363

TEÓ D'ALEXANDRIA
Conferències (Ἀπὸ συνουσιῶν τοῦ Θέωνος), 2

VARRÓ, Marc Terenci
Les disciplines (*Disciplinæ*), 3, 364
VERA, Francisco
Elementos de Geometría, a VERA (1970), volum I, p. 702–980, 84
VITRAC, Bernard
Euclide. Les Éléments, 84, 93, 186, 273

ZENÒDOR
Sobre les figures isoperimètriques (Περὶ ισομετρων σχημάτων), 350, 365

Índex de termes

àlgebra, 14
egípcia, 153
geomètrica, *vegeu* àlgebra geometritzada
geometritzada, 33, 153
mesopotàmica, 153, 301
problema, 34
algorisme de determinació de les ternes pitagòriques, *vegeu* terna pitagòrica
altura, 53, 62, 77, 302
concepte d', 134
d'un paral·lelogram, 140, 341
d'un sòlid, 134
d'un triangle rectangle, 35, 54, 313, 314
teorema de l', *vegeu* teorema de l'altura
d'una figura plana, 134, 302
d'una piràmide, 69
mateixa, 53, 134, 138, 140, 302, 305
anàlisi, 220, 252
angle, 78
agut, 16, 78
bisectriu d'un, 24, 54
capaç, 38, 40, 182, 185
central, 41, 53, 182
d'un segment circular, 36, 37, 38, 185
de contacte, 40, 208
del semicercle, 185
dièdric, 11, 37
en un segment circular, 38, 185
extern, 14, 109, 182
inscrit, 41, 38, 182
intern, 14, 109, 182
mixtilini, 38, 185
obtús, 16, 78
oposat, 109
pla, 16, 78, 107
que subtendeix un arc, *vegeu* angle capaç
recte, 16, 78, 83, 149
rectilini, 16, 78
semiinscrit, 182
angles
adjacents, 16, 78, 108
alterns, 123
externs, 123
interns, 123
centrals
semblança dels, 57
horitzontals, 108
iguals, 78
inscrits
semblança dels, 57
oposats, 17, 35, 61, 80, 91, 109, 132
pel vèrtex, 28, 108, 123
verticals, 108
aplicació, *vegeu* superposició
d'àrees, 9, 35, 53, 55, 68, 143, 145, 154 –156, 163, 178, 301, 340, 344

en el·lipse, 33, 68, 154, 156
en hipèrbola, 33, 68, 156
en paràbola, 68, 143, 145, 154, 156
exacta, *vegeu* en paràbola
justa, *vegeu* en paràbola
per defecte, 34, 56, 154, 163, 340, 342
per excés, 34, 154, 166, 344, 346

aproximació
de $\sqrt{2}$, 173
de $\sqrt{5}$, 69

arc, 38, 41, 92, 182, 184, 185

àrea, 23, 29–32, 34, 35, 55–57, 66, 68, 69, 77, 86, 132–134, 163
del cercle, 25, 350
del rectangle, 232
del sector circular, 350
del triangle, 245

aritmètica, XIII, 3, 50, 299
pitagòrica, XIII, 8, 73,
terna, 11

arquimedianitat, 24

bisectriu, 24, 54, 65, 67, 101, 245, 305
existència de la, 24

càlcul
d'àrees, 11
de volums, 11

centre
de la circumferència, 16, 80
del cercle, 16, 17, 19, 79, 80
unicitat del, 64
del semicercle, 17, 79, 80

cercle, 16, 19, 36, 79, 182, 183, 186, 188, 240
centre, 16, 79, 80
convexitat del, 188
corda d'un, 188, 240
diàmetre, 17, 79
donat, 240
tangent al, *vegeu* tangent a la circumferència

cercles
igualtat de, 37
superposició, 183
tangents, 184

cilindre, 11

circumcentre, *vegeu* triangle, 65, 246

circumferència, 16, 19, 27, 36, 79, 80, 181–183, 186
centre, 19, 27
donada, 240
radi, 27
potència d'un punt a una, *vegeu* potència
tangent a una, *vegeu* tangent a una circumferència

cissoide, *vegeu* corbes

clàssic, 7

compàs, 9, 10, 34, 35, 43, 44, 46, 57, 66, 82, 89, 134, 148, 155, 164, 166, 223, 237, 238, 301
amb memòria, 27, 28
sense memòria, 27, 28

compatibilitat
de la igualtat amb la suma i la resta, 21
de la multiplicitat amb la suma i la resta, 265

con, 11

conceptes bàsics
de geometria, *vegeu* l'entrada corresponent
àlgebra
angle
aplicació d'àrees
baricentre, *vegeu* triangle
bisectriu, *vegeu* angle
centre

cercle
cilindre
circumcentre, *vegeu* triangle
circumferència
compàs, *vegeu* regle i compàs
compatibilitat
con
congruent
construcció
corba
corda
criteri
d'igualtat
de semblança
desigualtat
diàmetre
distància
esfera
estereometria
exhaustió
extrem
fracció, *vegeu* part alíquota
gnòmon
igualtat
incentre, *vegeu* triangle
infinit
invariància
límit
línia recta
lúnula
magnitud
mediatriu
múltiple
ortocentre, *vegeu* triangle
paral·lelepípede
paral·lelogram
part alíquota
perpendicular
piràmide
polígon
polígon regular
prisma
proporció
proporcions contínues
punt
quadrat
quadrilàter
radi
raó
rectangle
regle, *vegeu* regle i compàs
rombe
romboide
sector circular
segment
segment circular
segments
semicercle
semicircumferència
sòlids
superfície
trapezi
triangle
metodològics, *vegeu* l'entrada corresponent
definició
demostració
dibuix ideal
diorisma
disjunció de casos
element
figura
hipòtesi de l'absurd
lleis
noció comuna
porisma
postulat
principi
proposició
reducció a l'absurd
congru, *vegeu* congruent
congruència, 23, 85, 86,

axiomes de, 93
congruent, 29, 37, 85, 98, 168, 240, 241, 265, 343
cònica, *vegeu* corbes
construcció, 24, 25, 44, 45, 86, 87, 145, 280
amb regle i compàs, 43, 44, 147, 155
com a part d'un problema, 86, 87
d'un angle donat, 29, 117, 148, 155
d'un rectangle, 180
d'una corda, 240
de l'hexàgon regular, 44, 46, 66, 69, 241, 260, 261
de l'octògon, 46, 66
de la mitjana proporcional
de magnituds, 299
de segments 156, 180, 299, 300, 317
de la quarta proporcional, 65, 156, 292, 300, 317
de la tangent, 40
de la tercera proporcional, 156, 300, 317
del cercle
circumscrit a un triangle, 245
inscrit en un triangle, 244
del decàgon regular, 44, 46, 66, 69, 252, 263
del dodecàgon regular, 46, 66, 69
del paral·lelogram, 141, 319
del pentadecàgon regular, 44, 46, 69, 254, 263, 264
del pentàgon regular, 41, 44–46, 66, 69, 175, 236, 238, 252, 254, 255, 258, 260
del quadrat, 46, 69, 147, 180, 248–251
del segment
auri, 175, 300
paral·lel, 42, 128
perpendicular, 102, 103
del triangle
circumscrit, 242
de costats donats, 26, 116
equilàter, 26, 46, 69, 86,
inscrit, 241
isòsceles particular, 45, 238, 252
dels elements del cosmos, *vegeu* sòlids platònics
dels polígons regulars, 44, 148, 240
dels sòlids platònics, XIII, 9, 11, 73
amb regle i compàs, 66, 237
escolar, XIII, 11, 74, 238
existència basada en la, 25
posssibilitat de la, 113
continuïtat, 24, 25
corbes
cissoide de Diocles, 357
còniques, 163, 177
hipèrbola
arc d', 84
asímptota de la, 84
corda d'un cercle, 20, 36–41, 44, 45, 92, 182, 184–186, 188, 189, 204, 206, 212, 213, 216, 224, 227, 232, 240, 248
cordes d'un cercle
relació d'ordre entre les, 206
corol·lari, *vegeu* porisma
costat, 26, 28, 29, 30
oposat, 29, 30, 45, 53, 54, 60
costats, 14, 17, 18, 35, 36
dels polígons regulars, 66
homòlegs, 55
iguals

dels quadrats equivalents, 67
dels rectangles semblants equivalents, 67
oposats, 45, 61, 65, 145
a angles iguals, 53
proporcionals, 53, 54
inversament, 53, 55
criteri
d'igualtat de triangles, 26
ACA, 27, 121
CAC, 27, 91
CCC, 27, 98, 99
de semblança de triangles
AAA, 54, 307
ACC, 54, 311
CAC, 54, 309
CCC, 54, 308

decàgon regular, *vegeu* polígon regular
deficiència d'un paral·lelogram, 56, 342
definició, 8, 10–12, 14, 15, 25, 37, 44, 48, 53, 76, 77, 156, 183, 239, 265, 300
demostració, 2, 10, 26, 86, 89, 277, 279, 283
per casos, *vegeu* disjunció de casos
per l'absurd, *vegeu* mètode de reducció a l'absurd
per tangram, 64
semàntica, 10
sintàctica, 10
desigual, 23
desigualtat, 61, 85, 94, 189, 265, 280
compatibilitat amb la suma i la resta, 280
de raons, 49, 265
dels costats, 180
principi de substitució, 119, 194, 225, 278, 286
propietats de la, 280
transitivitat de la, 61, 112, 280
triangular, 113
diagonal
d'un paral·lelogram, 29, 32, 55, 81, 131–134, 142, 143, 157, 301, 335, 338, 339
d'un pentàgon, 45
d'un quadrat, 162
diagrama dels lligams deductius, 26
diàmetre
d'un paral·lelogram, *vegeu* diagonal
de la circumferència, *vegeu* diàmetre del cercle
del cercle, 17, 20, 37, 39, 40, 45, 79, 82, 83, 89, 181, 183, 185, 193, 206, 208, 210, 213, 222, 224, 240
dibuix ideal, 10, 51, 96–98, 188, 270, 317, 332, 339
diorisma, 12, 26, 28, 34, 45, 56, 57, 63, 113, 116, 238, 240, 299, 340, 341, 361
discriminant, 57, 340
disjunció de casos, 86, 87, 89, 106, 152, 177, 179, 180, 184, 188, 213, 217, 218, 228, 231, 232, 234, 241, 246, 277, 279, 283, 292, 342
distància, 39, 82, 117
a la costa, 69, 121
d'un punt a un segment rectilini, 184, 204
del centre del cercle a una corda d'un cercle, 184, 189, 204
entre dos centres, 113
entre dos punts, 204
geomètrica, 184
numèrica, 184

distinció de casos, *vegeu* disjunció de casos
divisió d'una figura, 186
dodecàgon regular, *vegeu* polígon regular
duplicació del cub, 15

element, XIV, 12, 15, 74, 76, 238, 327
  auxiliar, 27, 237
  bàsic, *vegeu* geomètric
  de la construcció del pentàgon, 252
  específic, 74
    definició, 74
    noció comuna, 75
    postulat, 74
  general, *vegeu* element geomètric
  geomètric, 74
  necessari, 156
  primigeni, 10
  propi, 182
  sintètic, 252
elements
  d'una proposició, 87, 89
ens geomètric idealitzat, 77
epistemologia, 2
equació de segon grau, 154
  resolució algèbrica, 34, 55, 57, 63, 154, 301
  resolució geomètrica, 164, 166, 180, 301, 341, 346
equivalència, 23, 85, 96, 162
  amb tangram, 154
  de polígons, 75
  de rectangles, 300
  de superfícies, 153, 162
equivalent, 29
escola
  atenenca, 60
    platònica, 10, 53
    sofista, 53
  epicúria, 355
  estoica, 76
  pitagòrica, 8, 13, 35, 53, 73, 75–77, 109, 130, 143, 155, 300, 347
escoliasta, 186
esfera, 11, 94, 110
  divisió de l', 357
  volum de l', 25
estereometria, XIII
estructuració logicometodològica, 8
excedència d'un paral·lelogram, 56
exhaustió, XIII, 73, 363
existència, 23
  de l'heptàgon, 15
  de la bisectriu, 24
  de la mitjana
    i extrema raó, 156
    proporcional, 156
  de la quarta proporcional, 156
  de la tercera proporcional, 156
  del paral·lelogram, 157
  dels objectes geomètrics, 25
extrem, 15–20, 27, 29, 38–40, 77–79, 82–84, 86, 87, 89, 91, 92, 97, 103, 114, 131, 157, 162, 164, 181, 184–186, 188, 189, 208, 210, 211, 240, 241, 252, 261, 270, 339
  d'un segment, 39
  d'una superfície, 77

figura, 16, 79, 302
  als *Elements*, 27
  altura d'una, 53, 302
  angular, 92
  circumscrita, 44, 239
  compleció d'una, 64, 166
  convexa, 188
  deformació de la, 23
  divisió d'una, 186
  frontera de la, 14, 78–80

general, 103
ideal, 10, 27, 51, 96–98, 270, 317, 332, 339
impossible, *vegeu* ideal
independència de la, 187, 188
inscrita, 44, 239
multilàtera, 17, 80
paral·lelogramàtica, *vegeu* paral·lelogram
plana, 32
poligonal, 145, 146, 164, 180, 325
àrea, 57
còncava, 67, 324, 325
convexa, 62, 134, 146, 188, 324
quadrable, 35
quadratura, 155, 180
rectilínia, 35, 67
còncava, 67, 146, 324, 325
quadrilàtera, 17, 80
rectes paral·leles, 81
postulat de les, 83
rectilínia, 17, 80, 300, 324, 337
sòlida, 11
trilàtera, 17, 80
figures
rectilínies
inversament proporcionals, 53, 301
isoperimètriques, 350
semblants, 53, 55, 57, 300, 332, 334
finitud, 86
fracció, *vegeu* part alíquota
frontera, 14, 78–80

ganivet del sabater, 186
geometria, 2, 3, 10, 32, 47–49, 74, 92, 93, 153
algebritzada, 153, 157
de l'espai, 73
del cercle i de la circumferència, 36, 186
del paral·lelogram, 14
del regle i el compàs, 223, 301
del triangle, 13, 14, 71
elemental, 9
escolar, XIII, 11
euclidiana, XIII, 14, 18, 26, 29, 75, 83, 85, 123, 126, 156
moviment en la, 86
eudoxiana, 300
figurativa, 188
grega, 35, 75, 87, 154, 234
història de la, 2, 8, 9
independent de la figura, 188
neutral, 26, 83, 86, 123
no euclidiana, 2
pitagòrica, 35, 75, 76
plana, XIII, 11, 52, 53, 73, 264, 302
de l'espai, *vegeu* tridimensional
elemental, 8, 10, 11, 13, 14, 74
preeuclidiana, 72
preeudoxiana, 152
projectiva, 2
superior, 9
talesiana, 75
teoria de la proporció, 11, 47, 53, 264
tridimensional, 9, 11, 73
angle dièdric, 11
càlcul d'àrees i volums, 11
cilindre, 11
con, 11, 94
esfera, 11, 25
figura sòlida, 11
piràmide, 11
prisma, 11

geometria grega, *vegeu* conceptes geomètrics bàsics
geometria mesopotàmica, *vegeu* àlgebra mesopotàmica
gnòmon, 30, 32, 63, 64, 142, 157, 163, 164, 166, 167
gnoseologia, 2

hexàgon regular, *vegeu* polígon regular
hipòtesi
- de l'absurd, 30, 60, 82, 83, 96–98, 100, 104, 107, 112, 120–122, 124, 126, 130, 138, 139, 187, 188, 191, 192, 195, 198, 201, 202–204, 208, 209, 211, 212, 216, 217, 221, 245, 251, 259, 282, 283, 292, 311, 332, 339
- de reducció a l'absurd, *vegeu* hipòtesi de l'absurd

història
- de la geometria, 71–352
- de la trigonometria, 156
- del càlcul, 264–352

identitat algèbrica, 153
igualtat
- d'angles, 23, 127, 186
  - d'un triangle isòsceles, 24
- d'àrea, 23
- d'equimúltiples, 265
- de cercles, 37
- de costats, 180
- de longitud, 23
- de raons, 49, 265
- de segments rectilinis, 23
- de superfícies, 153
- de triangles, 23, 26, 75, 135
  - criteri ACA, 27, 121
  - criteri CAC, 27, 91
  - criteri CCC, 27, 98, 99
- de volums, 23
  - per congruència, 29, 37, 85, 86
  - per equivalència, 29, 85, 86

incentre d'un triangle, 65, 245
incommensurabilitat
- en línia, 11
- en superfície, 11

infinit
- de Dedekind, 86
- en acte, 10, 15, 18, 20, 27, 29, 75, 81–83
- limitació aristotèlica de l', 8, 18
- paradoxes de l', 21

invariància, 41, 183
- de l'angle inscrit que subtendeix un arc, 185, 215
- de la potència d'un punt a una circumferència, 183, 232, 233

lema, 12, 13, 26, 44, 213, 238
limitació aristotèlica de l'infinit en acte, *vegeu* infinit
línia, 15, 16, 76–79, 82, 89
- recta, 14–16, 77, 78, 80, 101, 103, 116, 132
  - infinita, 103

llei
- de substitució d'iguals, 189
- de transitivitat
  - de la igualtat, 61
  - de la relació d'ordre, 99
- de tricotomia, 97, 283
- distributiva del producte respecte de la suma, 157

lligam deductiu de les proposicions, 26
lògica, 14
lúnula, 57, 247, 350

magnitud, XIII, 48, 49, 51, 265
- en Aristòtil, 48
- en el diàleg socràtic, 22

intermèdia
existència, 25
múltiple d'una, 265, 276
part, 48
alíquota d'una, 48, 265
partició d'una, 25
submúltiple d'una, 276
magnituds
arbitràries, 25, 50, 270, 272, 279
col·leccions de, 269
commensurables, 9, 51
de la mateixa classe, 49, 268
en proporció contínua, 49
equimúltiples de, 266, 270
existència de, 50, 276
i principi d'Arquimedes, 25
incommensurables, XIII, 9, 264
juxtaposició de, 50
proporcionals, 66, 267, 268, 282
raó entre, 49, 51, 266
equimultiplicitat, 51
relació d'ordre, 25
representació de les, 270
resta de, 265
suma de, 265, 270
propietat distributiva, 270
transitivitat de la igualtat de, 51
unió de, *vegeu* suma
matemàtica
àrab
expressió algèbrica, 154
lectura algebritzada, 154
grega, *vegeu* geometria grega
mesopotàmica, *vegeu* àlgebra mesopotàmica
occidental
infinit de Dedekind, 86
mediatriu d'un segment, 65, 246
mentalitat grega, 11
mètode, 48
de l'absurd, *vegeu* mètode de reducció a l'absurd
de reducció a l'absurd, 14, 27, 30, 38, 61, 93, 96
de triangulació, 146
deductiu, 90
expositiu de Heath, 87
tangram
euclidià, 9, 14, 26, 30, 35, 75, 134, 135, 149, 151–154, 155, 156, 162, 170 232–234, 300
generalitzat, *vegeu* tangram euclidià
metodologia
aristòtelica, 9, 14
logicodeductiva, 9
recurs a l'infinit, 10
del regle i el compàs, 9, 10
tangram, 9
mitjana
aritmètica, 299
geomètrica, 299
i extrema raó, 9, 34, 45, 156
proporcional, 54, 180, 300, 318
existència de la, 299
moviment en la geometria, 23, 24, 27, 41, 83, 86, 93, 94, 99, 121, 217, 265
múltiple, 48, 265

noció comuna, 8, 11, 12, 18, 21, 23, 31, 48, 75, 81, 84–88, 90, 94, 99, 109, 110, 137
aristotèlica, 21
cinquena, 85, 265
prima, 86
novena prima, 86
primera, 85
prima, 85
quarta, 12, 18, 23, 85

prima, 85
segona, 85
prima, 86
setena prima, 86
sisena prima, 86
tercera, 85
prima, 85
vuitena prima, 86
nombre
$\sqrt{2}$, 173
$\sqrt{5}$, 69
nombres costat-diagonal, 173
notació geomètrica, 142

octògon regular, *vegeu* polígon regular

papir d'Oxirrinc, 3
paradoxes de l'infinit, 21
paral·lelisme,
conseqüències del, 26
paral·lelogram, 14, 18, 26, 29, 30, 32, 53, 55, 56, 62, 67, 80, 81, 131–136, 138, 140–143, 145, 149, 155–157, 301, 302, 304, 319, 322, 334, 337, 339, 340, 341
altura del, 341
àrea del, 26, 29, 132, 140, 157
compleció del, 340
comprès per, *vegeu* contingut entre
construcció del, 30
contingut entre, 32, 156
deficient, 56
definició, 18
determinat per, *vegeu* contingut entre
diagonal d'un, 81, 339
diàmetre d'un, *vegeu* diagonal
excedent, 56
existència d'un, 155, 322
quadratura, 76, 141
rectangular, 32, 156
superfície, *vegeu* àrea
paral·lelograms
equiangles, 334
equivalents, 55
semblants, 55, 56, 67, 149, 341
part, 48
alíquota, 9
partició de segments, 25
pensament
filosòfic aristotèlic
limitació de l'infinit, 8
filosòfic platònic
figura, 8
nom, 8
raó, 8
pentadecàgon regular, *vegeu* polígon regular
pentàgon regular, *vegeu* polígon regular
perpendicular, 16, 20, 26–28, 37, 39, 40, 53, 60, 63, 65, 78, 83, 102, 104, 105, 129, 149, 151, 159, 164, 184, 186–188, 210, 212, 246, 248, 302, 313, 314
existència, 27, 102, 104, 103
unicitat, 104, 187
piràmide, 11
polígon, 14, 337
angles
externs, 109
interns, 109
oposats, 109
cercle
circumscrit a un, 44, 238
inscrit en un, 44, 238
circumscrit, 44, 237–239
còncau, 62

construïbles amb regle i compàs, 148, 237
convex, 62, 134
costat d'un, 93
equiangle i equilàter, *vegeu* regular
inscriptible, 66
inscrit, 44, 223, 237–239
rectilini
quadratura del, 26
regular, 30, 44, 66, 69, 237–239
circumscrit, 44
construcció del, 236
construïbles amb regle i compàs, 43, 66
decàgon, 44, 46, 66, 69, 252, 254
dodecàgon, 46, 63
heptadecàgon, 238
heptàgon, 15
hexàgon, 46, 66, 69, 237, 241, 254, 260, 263
inscrit, 44
octògon, 46, 63
pentadecàgon, 44, 46, 66, 69, 237, 254, 263
construcció del, 46
pentàgon, 37, 41, 44–46, 66, 69, 236–238, 260
construcció del, 46, 66, 252
quadrat, 17, 26, 44, 46, 66, 69, 80
construcció del, 46, 69, 237, 248–251
triangle equilàter, 44, 46, 66, 69, 80, 237
construcció del, 86
suma dels angles
externs, 14, 62
interns, 14, 62
triangle isòsceles particular, 252
polígons
equivalents, 75
semblants, 55, 300, 327
porisma, 11–14, 28, 35, 36, 42, 43, 45–47, 52, 54, 55, 58, 59, 67, 98, 99, 101, 105, 109, 110, 128, 130, 131, 134–136, 138, 141, 146, 149, 159, 162, 164, 165, 167, 169, 170, 175, 185, 186, 188, 192, 199, 200, 210, 211, 214, 215, 226, 229–231, 237, 238, 240, 241, 243, 247, 259, 263, 264, 272, 274, 275, 278, 293–295, 298, 314, 315, 318, 319, 322, 323, 327, 331, 343, 350
postulat, 2, 8, 9, 11, 12, 14, 15, 18–21, 23–25, 49, 60, 61, 74, 79–84, 86–90, 94, 109, 113, 118, 123, 126–129, 144, 152, 183, 189, 241, 246, 266, 279
cinquè,
d'Arquimedes, 266
d'Euclides 12, 18–20, 24, 60, 80, 81, 83, 84, 123, 126, 145, 246
comentari al, 84
dependència, 26
independència, 26
com a definició, 25, 279
d'existència, 18–20
de Playfair, 129
del regle i el compàs, 9
dels paral·lels, 19, 20, 61, 83, 127–129
en Aristòtil, 19
en Plató, 19
primer, 18, 81–83, 118,

prima, 19
quart, 20, 23, 78, 83, 86
segon, 19, 79, 81–83, 144, 183
prima, 19
tercer, 18, 81–83, 89, 94, 182
potència d'un punt a una circumferència, 36, 41, 42, 232, 233, 236
invariància de la, 41, 232, 233
principi, 91
d'Arquimedes, 25
de Bolzano, 24
de continuïtat, 24, 25
de reducció a l'absurd, *vegeu* mètode de reducció a l'absurd
de substitució, 61, 98, 119, 194, 225, 273, 278, 286, 299, 306, 308
per a magnituds, 286
per a raons, 286
prisma, 11
problema, 9, 10–14, 24, 32, 34, 35, 40, 41, 44, 45, 54, 55, 75, 81, 86, 87, 100, 104, 109, 116, 128, 145, 154, 155, 156, 164, 166, 175, 182, 186, 208, 238, 252, 358
algèbric resolt amb geometria, 34, 154, 164, 166, 301
construcció d'un, 86
demostració d'un, 86
geomètric, 9
no resoluble amb regle i compàs, 9, 10
mesopotàmic, 34, 301
resoluble amb regle i compàs, 35, 153, 164, 166
problemes clàssics, 9
procés del tangram, *vegeu* mètode tangram
propietats
euclidianes, 26
neutrals, 26
proporció, 9, 48, 49, 264, 265, 267, 268, 289, 299, 358
concepte general, 304
contínua, 49, 293
geomètrica, 265
inversa, 53, 55, 301
numèrica, 264, 267, 269
pertorbada, 269, 297
proporcions contínues, 49
proposició, 11, 12, 26, 86
conclusió, 87
construcció, 87
demostració, 87
enunciat, 87
especificació, 87
euclidiana, 24
exposició, 87
neutral, 26, 86
plantejament, 87
proposicions, lligam deductiu de les, 26
punt, 15, 16, 19, 77
arbitrari, 94, 166, 167, 240
baricentre, 65
centre de gravetat, *vegeu* baricentre
circumcentre, 65
com a centre, 16, 19, 79, 82, 89, 260
com a extrem, 89, 116, 189
com a peu de la perpendicular, 63
com a vèrtex, 63, 78
comú, 37, 183, 184, 192
d'intersecció, 144
existència del, 144
de dues circumferències, 113

d'un arc de circumferència, 185
d'un diàmetre, 193
d'un segment, 60, 64, 102–104, 155, 229, 236
de la prolongació, 155
d'una circumferència, 40, 208
potència d'un, 36, 41, 232, 233, 236
d'una recta, 103, 128
de contacte, 28, 226
de divisió, 34, 301
en mitjana i extrema raó, 45, 302
de l'arc, 185
de la circumferència, 17, 79, 87, 181, 189, 208
de tall, 19, 20, 37, 65, 83, 88, 90, 97, 144, 161, 186, 210, 246, 306, 319, 334
existència, 145
de tangència, 40, 201, 202, 208, 211–213
definició de, 15, 77
del cercle, 198
del costat d'un angle, 118
del diàmetre, 193
donat, 27, 60, 89, 103, 118, 129
existència del, 117
exterior, 103
a un cercle, 39–41, 183, 195, 210
a un segment, 28, 60, 61, 83, 103, 104, 128, 139, 140
a una recta, 28, 83, 129, 212
incentre, 65
interior
a un angle, 109, 110
a un cercle, 16, 38, 39, 41, 79, 183, 188, 198, 204, 210
a un polígon, 14
a un triangle, 98, 114
a una figura, 79
mitjà d'un segment, 65, 103, 164, 186, 246
ortocentre, 65
segments alineats en un, 28
punts
diferents, 18
distància entre, 252
en comú, 39
extrems d'un segment, 15, 19, 39, 77, 83, 87, 89
no alineats, 45

quadrat, *vegeu* polígon regular
circumscrit, 249
existència del, 249
definició de, 17
inscrit, 248
existència del, 248
quadratura
de les figures poligonals, 26, 30, 35, 145, 155, 180
de les lúnules, 350
del cercle, 180, 359
del paral·lelogram, 75
quarta proporcional, 54, 65
de magnituds, 282
de segments, 65, 156, 292, 317
existència, 65, 292, 317
de superfícies, 25
de volums, 25

radi, 27, 37, 66, 82, 84, 89, 118, 164, 182, 183, 186
del cercle circumscrit a un polígon regular, 69
del cercle inscrit en un triangle, 245

desconegut, 189
donat, 192, 240
més curt que el, 64
més llarg que el, 210
radis, 38, 57
diferents, 192
iguals, 53, 82
raó, 49, 265
alternada, 50, 265, 268
compactada, 269
composta, 50, 268
convertida, 269
doble, 265, 268
entre magnituds, 266, 267
invertida, 50, 268
n-pla, 49
per igualtat, 50, 269
pertorbada, 50, 269
separada, 50, 269
raonament per l'absurd, *vegeu* reducció a l'absurd
raons
composició de, 268
contínues, 49
desigualtat de, 49, 265
ex æquali, 50, 259
igualtat de, 49, 265
rectangle, 17, 80
rectes
paral·leles, *vegeu* segments paral·lels
perpendiculars, *vegeu* segments perpendiculars
reducció a l'absurd, 14, 27, 30, 38, 61, 93, 96, 100, 107, 112, 128, 129, 188, 259
resolució
amb regle i compàs, 35
algèbrica, 56
geomètrica, 57
de les equacions de segon grau, 154, 157
resta
d'arcs, 236
de magnituds, 265
de segments, 90, 154
compatibilitat amb la, 21
rombe, 17, 80
romboide, 17, 80

secció àuria, 175
sector circular, 37, 38, 41, 182, 186
segment, 86
adaptat a un cercle, *vegeu* corda d'un cercle
auri, *vegeu* mitjana i extrema raó
circular, 36–38, 182, 184, 185, 215, 227
angle d'un, 185
angle en un, 185
propietats, 41
costats
diferents d'un, 107
oposats, 17
de cercle, *vegeu* segment circular
de línia, 77
de superfície, 77
exterior a un cercle, 184
extrem d'un, 15, 16, 19, 20, 39, 77
mateix costat d'un, 97, 98, 106
mitjana i extrema raó, 45, 155, 156, 175, 252, 302
mitjana proporcional, 156, 180, 209, 300, 318
perpendicular, 16,
existència, 26–28, 102–105
punt d'un, 103
punt exterior d'un, 103
quarta proporcional, 25, 65, 156, 292, 300, 317

rectilini, 16-19, 78, 82
secant, 29, 126, 319
a un cercle, 184
tangent, 36, 37, 40, 201, 208, 211, 230
a la circumferència, 182–185, 240
tercera proporcional, 54, 156, 300, 317
segments
circulars, 36, 37, 41
semblants, 38, 185, 186
juxtaposició, *vegeu* suma
mesurables, 32
paral·lels, 20, 75
existència dels, 26, 128–130
resta de, 90, 154
suma de, 27, 79, 86, 89, 166
semblança de
angles d'un cercle, 57
figures, 52, 53, 55, 57, 332, 334
rectilínies, 301, 334
paral·lelograms, 339
segments de cercle, 41, 186
triangles, 54, 232,
AAA, 54, 307
ACC, 54, 311
CAC, 54, 309
CCC, 54, 308
semicercle, 80
semicircumferència, 80
simbolisme geomètric grec, 87
símbols
a la geometria grega
A, 87
$\hat{A}$, 141
AB, 87
$\overline{AB}$, *vegeu* AB
$\widehat{ABC}$, 92
$\overset{\frown}{AHC}$, 209
$A\overset{\frown}{E}FC$, 196
○$(A; MN)$, 86
○DEC, 86
⌐ NOP, 164
⬡$ABCDEF$, 262
▱ AD, 56
⬠$ABCDE$, 255
⬠ $ABCD$, 147
□ AF, 56
□ $ABFG$, 62
⬠ $FECG$, 141
⌓ $BADC$, 216
⌓ BAC, 225
△ C, 143
△ CAB, 27
externs a la geometria grega
$\mathfrak{A}$, 66
$\mathfrak{B}$, 66
D, 12
E, 12
Lem., 12
Ll, 12
Nc, 12
P, 12
♠, 86
Por., 12
Prob., 12
QED, 89
Teor., 12
♣, 86
síntesi, 252
sòlids platònics, 11, 12
construcció dels, 11, 12
suma
d'angles, 65
d'arcs, 236
d'àrees de quadrats, 57, 149
de magnituds, 265, 270
d'antecedent i consegüent d'una raó, 268
d'antecedents de raons, 285
de consegüents de raons, 285

propietat distributiva, 270
de segments, 27, 79, 89, 90, 154, 168
compatibilitat amb la, 21
compatibilitat amb la desigualtat, 280
propietat distributiva, 157
transitivitat, 21
dels angles
d'un polígon
externs, 62
interns, 62
d'un triangle
externs, 14
interns, 26, 61, 75, 307
invariància, 307
superfície, 32, 77, 155
extrem d'una, 77
plana, 78
quarta proporcional, 25
superposició, 23, 85, 121
de cercles, 183
de segments rectilinis, 86
de triangles, 93, 99
en general 85

tangent, 182
a un cercle, *vegeu* tangent a una circumferència
a una circumferència, 36, 183, 239
segment, 236
tangram, *vegeu* mètode del tangram
teorema, 9, 12, 14, 86, 87
d'invariància, 183, 184, 185, 215, 232, 233
de l'altura d'un triangle rectangle, 35, 54, 313, 314
de la bisectriu, 54, 65, 67, 305
de Menelau, 361
de Pitàgores, 9, 26, 30, 34, 35, 54, 57, 62, 75, 149, 152, 155, 156, 164, 170, 177, 178, 207, 300
general, *vegeu* teorema del cosinus
generalitzat, 34, 35, 57, 170, 177, 179, 347
a polígons semblants, 300
pel mètode tangram, 30, 60, 62
recíproc d'un, 30, 138, 152, 212, 221, 222, 282
trigonomètric, *vegeu* generalitzat
de Tales, 48, 54, 55, 65, 69, 101, 156, 264, 300, 304, 316, 317
per a superfícies, 55, 300
del cosinus, 34, 35, 155
cas agut, 155
cas obtús, 155
del gnòmon, 163, 164
del tangram
euclidià o generalitzat, 300
teoria
d'Èudox, *vegeu* teoria de la proporció
de la proporció, XIII, 9, 11, 35, 47–49, 53, 65, 73, 75, 152, 156, 180, 186, 214, 232, 254, 264, 265, 267, 270, 300, 315
aplicacions de la, 53, 269
dels paral·lels, 75
general, *vegeu* teoria de la proporció
i la geometria plana, 264
i la semblança de triangles, 232, 234, 264
tercera proporcional, 54, 282, 301, 317
terme, 3, 14
algèbric, 175
aristotèlic, 48

com a definició, 76, 267
com a nom d'un objecte, 14
d'una proporció, 9, 306
euclidià, 34
geomètric, 33, 153, 214
numèric, 153
termes
d'una raó, 48
addició, 48
alternança de, 48, 50, 265, 267, 268, 289
antecedent, 268
composició, 48, 50, 268
conseqüent, 268
conversió, 50, 269
inversió, 48, 50, 268
mitjans, 55, 268, 269
multiplicació, 48, 50
partició, 48
pertorbació, 50, 269
separació, 48, 50, 269
terna pitagòrica, 11, 267
topologia, 188
torsió d'un segment, 28, 109, 110
tot, 21, 85
transitivitat
de la desigualtat, 112, 115, 280
de la igualtat, 112
de la relació d'ordre, 99, 196
de la semblança de les figures poligonals, 331
transport, *vegeu* moviment
trapezi, 17, 81, 186
triangle, 14, 17, 80
acutangle, 17, 34, 80
altures d'un, 65
àrea del, 26
baricentre de, 65
centre de gravetat del, *vegeu* baricentre
circumcentre del, 65, 246
criteris d'igualtat, *vegeu* criteris
d'una esfera, 110
equilàter, *vegeu* polígon regular
escalè, 17, 80
geometria del, 13, 71
i moviment, 92, 99
incentre del, 65, 245
isòsceles, 17, 27, 60, 80, 94, 96
del pentàgon, *vegeu* especial
especial, 45
mediatriu d'un, 65
mitjanes d'un, 65
obtusangle, 17, 34, 80
ortocentre del, 65
propietats del, 26, 75
rectangle, 17, 26, 30, 35, 62, 63, 80, 149
caracterització del, 26
catet, 149
hipotenusa, 149
teorema de l'altura, 313, 314
suma dels angles, *vegeu* suma
triangles
diferents, 98
entre segments paral·lels, 136
equivalents, 55
i la teoria de la proporció, 48, 53
semblants, 45, 51, 53
criteris de, *vegeu* criteris
superposables, 97
triangulació, 325
trisecció de l'angle, 101

volum, 11, 23
de l'esfera, 25

Índex general

Introducció xi

Capítol 1. Presentació dels *Elements* (Στοιχεῖα) d'Euclides. Llibres i, ii, iii, iv, v i vi 1

1.1. Breu descripció de la transmissió de l'obra 2

1.2. Algunes consideracions sobre els *Elements* 7

1.3. Ressenya del contingut dels sis primers llibres dels *Elements* 11

1.3.1. La geometria plana elemental: llibres i, ii, iii i iv 13

1.3.2. La teoria de la proporció d'Èudox i la seva aplicació a la geometria: llibres v i vi 47

1.4. Problemes 60

1.5. Algorismes 68

Apèndix A. Text dels *Elements* (Στοιχεῖα) d'Euclides. Llibres i, ii, iii, iv, v i vi 71

A.1. La geometria plana elemental: llibres i, ii, iii i iv 74

A.1.1. Llibre primer: Ei 74

A.1.1*a*. Les definicions d'Ei 76

A.1.1*b*. Els postulats d'Ei 81

A.1.1*c*. Les nocions comunes d'Ei 84

A.1.1*d*. Les proposicions d'Ei 86

A.1.1d_1. Neutrals 86

A.1.1d_2. Euclidianes 126

A.1.2. Llibre segon: EII 153
A.1.2*a*. Les definicions d'EII 156
A.1.2*b*. Les proposicions d'EII 157
A.1.3. Llibre tercer: EIII 182
A.1.3*a*. Les definicions d'EIII 183
A.1.3*b*. Les proposicions d'EIII 186
A.1.4. Llibre quart: EIV 237
A.1.4*a*. Les definicions d'EIV 239
A.1.4*b*. Les proposicions d'EIV 240
A.2. La teoria general de la proporció i les aplicacions a la geometria: llibres V i VI 264
A.2.1. Llibre cinquè: EV 265
A.2.1*a*. Les definicions d'EV 265
A.2.1*b*. Les proposicions d'EV 270
A.2.2. Llibre sisè: EVI 300
A.2.2*a*. Les definicions d'EVI 301
A.2.2*b*. Les proposicions d'EVI 302

Les figures del text 353
Matemàtics i personatges citats 355

Bibliografia 367

Índex d'antropònims 375
Índex de citacions 381
Índex d'indrets 389
Índex de mots i formes grecs i llatins 393
Índex d'obres 399
Índex de termes 403

Índex general 421

9 788499 654140